Poštarina plaćena u gotovu

HRVATSKO PRIRODOSLOVNO DRUŠTVO

SOCIETAS SCIENTIARUM NATURALIUM CROATICA

GLASNIK

MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

PERIODICUM

MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

SERIJA II.

T. 2 — 1947. — No. 1

Zagreb 1947

Izdaju: Matematičko-fizička sekcija i Astronomska sekcija

Izašao je, evo, prvi broj Glasnika za god. 1947, koji zbog tehničkih razloga prije nije mogao izaći. Ali tokom 1947 izaći će ipak svih pet brojeva Glasnika.

Sudjelujte u Glasniku! Širite Glasnik! Šaljite redovito pretplatu za Glasnik matematičko-fizički i astronomski!

Godišnja pretplata iznosi 120 dinara.

Članci, dopisi, pretplate i dr. šalju se na Redakciju Glasnika, Zagreb, Marulićev trg 19, Tel. 40-44, 40-45 ili na Upravu Društva, Ilica 16 III, Tel. 65-85 i naznačiti »Za Glasnik mat.-fizički i astronomski«. — Ček Prirodoslovnog društva: 40-704214.

Vlasništvo i naklada Društva.

Godišnja pretplata iznosi Din 120.—, a može se slati na pošt. čekovni račun broj 40-704214. — Redakcioni odbor: Dr. D. Blanuša, D. M. Katalinić, Dr. Đ. Kurepa, Dr. L. Randić, Dr. I. Supek. — Glavni i odgovorni urednik: Dr. Đuro Kurepa. — Štamparija »Rožankovski«, Zagreb, Savska c. 31.

Dr. Andre Gilić:

GRAFIČKO RJEŠAVANJE SFERNO-ASTRONOMSKOG TROKUTA ZA GEOGRAFSKU ŠIRINU ZAGREBA

($\varphi = 45^0 49',5$)

Postoje razne tabele,[1] po kojima se za pojedine geografske širine može bez računa odrediti visina nebeskog tijela kod poznatog satnog kuta i deklinacije, ili pak satni kut kod poznate deklinacije i visine, ili azimut na temelju satnog kuta i deklinacije i t. d. Također su izrađeni diagrami,[2] koji imaju da nadomjeste ili bar skrate računanje kod rješavanja raznih problema iz područja sferne astronomije. Ovakve tabele i diagrami mogu korisno poslužiti kadgod treba brzo doći do rezultata, a ne traži se najveća tačnost.

Ako se ograničimo na fiksnu geografsku širinu, kao što će biti slučaj kod stalne astronomske posmatračnice, tada će tabele i diagrami moći da budu jednostavnije izrađeni i njihova upotreba će biti prikladnija, jer će se moći da izbjegne raznim interpolacijama, koje inače smanjuju praktičnu vrijednost takvih pomagala.

Mi ćemo ovdje da izložimo izradbu i upotrebu diagrama za geografsku širinu Zagreba ($\varphi = 45^0 49',5$),[3] koji će sadržavati istodobno 4 glavna elementa sferno-astronomskog trokuta: satni kut τ, deklinaciju δ, visinu nad horizontom H i azimut Az, te će omogućiti da se grafičkim putem odrede bilo koje 2 od gore spomenutih vrijednosti, čim su preostale 2 poznate.

Razumije se, kao što za Zagreb, da se tako isto može izraditi diagram i za druge geografske širine, odnosno za niz okruglih vrijednosti geografskih širina, i tako sastaviti zbirku diagrama podesnih za opću upotrebu. Nama je ovdje nakana, da

---

1) na pr. tabele F. Souillagonet-a, P. L. H. Davis-a, Hydrogr. Office-a, London, ABC tabele u raznim zbirkama nautičkih tabela i t. d.

2) na pr. Diagrami kap. B. Mora (Riga), K. Schütte (Hamburg), E. Kohlschütter i t. d.

3) položaj astronomskog paviljona Tehničkog fakulteta u Zagrebu, po prof. N. P. Abakumovu.

na primjeru Zagrebačke geografske širine iznesemo metodu prikazivanja četiriju elemenata sferno-astronomskog trokuta u jednom jedinom diagramu, te da na nekoliko primjera pokažemo, kako se isti može praktički upotrebiti.

Temelj za izradbu diagrama dalo je 370 pari vrijednosti azimuta i visine, izračunate za okrugle, pune vrijednosti deklinacije između $+30^0$ i -30^0, i za satni kut od 0^h do cirka $8^1/_2{}^h$ i od cirka $15\frac{1}{2}^h$ do 24^h. To je područje, koje dolazi u obzir pri motrenju Sunca, Mjeseca i planeta, kod nas. Sâmo izračunavanje azimuta i visine, izveli smo na temelju jednadžba:

$$\sin H = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \tau$$

i

$$\sin Az = \frac{\cos \delta \cdot \sin \tau}{\cos H}$$

Gornje jednadžbe vrijede za sferno-astronomski trokut, čiji su uglovi: zenit, nebeski pol, zvijezda; stranice: $(90^0 - \delta)$, $(90^0 - H)$, $(90^0 - \varphi)$, a kutovi: $(180^0 - Az)$, τ i q. Pri tome znači δ deklinaciju; H visinu nad horizontom, mjerenu lukom vertikalnog kruga od horizonta do nebeskog tijela; φ geografsku širinu; Az azimut zvijezde, mjeren od juga, kao 0 — tačke, preko zapada, sjevera i istoka do 360^0; τ satni kut, računat od gornje kulminacije nebeskog tijela, kao 0 — tačke, do 24^h idući u smjeru s juga prema zapadu; q znači paralaktički kut.

U tabeli na strani 3 donosimo u izvodu numeričke vrijednosti visine i azimuta, za neke okrugle iznose satnog kuta i deklinacije, kao i za slučaj izlaza i zalaza nebeskog tijela, te prolaza kroz I Vertikal.

Diagram, izrađen prema izračunatim vrijednostima, priložen je u reprodukciji, koja je iz tehničkih razloga otprilike 6 puta smanjena prema originalu.

Slika je proizašla kombinacijom dvaju diagrama, od kojih je jedan prikazivao visinu kao funkciju satnog kuta, kod stalnih, okruglih vrijednosti deklinacije, a drugi je prikazivao azimut, kao funkciju satnog kuta, kod istih vrijednosti deklinacije.

Na diagramu su glavna četiri elementa sferno-astronomskog trokuta prikazana ovako:

Na ordinati (desni rub diagrama) označena je visina H, i to u skali $1^0 = 5$ mm na originalnom diagramu. Može se dakle

Visina i azimut te njima odgovarajući satni kut i deklinacija, za Zagreb ($\varphi = 45^0 49'.5$)

δ	−23° 27′		−20°		−10°		0°		+10°		+20°		+23° 27′	
τ	H	Az	H	Az	H	Az	H	Az	H	Az	H	Az	H	Az
0^h	20.7°	0°	24.2°	0°	34,2°	0°	44.2°	0°	54.2°	0°	64.2°	0°	67.6°	0°
1	19.4	14.6	22.8	15.3	32.6	17.6	42.3	20.5	51.9	24.4	61.4	30.5	64.5	33.5
2	15.6	28.4	18.8	29.8	28.0	33.9	37.1	38.8	46.0	45.1	54.3	53.7	57.0	57.4
3	9.6	41.1	12.6	42.9	21.1	48.3	29.5	54.4	37.6	61.5	45.1	70.2	47.5	73.8
4	2.0	52.7	4.7	54.7	12.6	60.9	20.4	67.5	27.9	74.8	34.9	83.1	37,2	86.2
5	—	—	—	—	3.0	72.3	10.4	79.1	17.6	86.3	24.5	94.0	26.8	96.9
6	—	—	—	—	—	—	0	90 0	7.2	97.0	14.2	104.2	16.6	106.8
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4.4	114.5	6.9	116.8
Za slučaj H = 0°														
$4^h 13^m.9$	0°	55.2°	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4 32.0	—	—	0°	60.6°	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5 18.2	—	—	—	—	0°	75.6°	—	—	—	—	—	—	—	—
6 0.0	—	—	—	—	—	—	0°	90.0°	—	—	—	—	—	—
6 41.8	—	—	—	—	—	—	—	—	0°	104.4°	—	—	—	—
7 28.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0°	119.4°	—	—
7 46.1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0°	124.8°
Za slučaj Az = 90°														
$4^h 20^m.3$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	33.7°	90.0°
4 37.2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	28.5°	90.0°	—	—
5 20.5	—	—	—	—	—	—	—	—	14.0°	90.0°	—	—	—	—
6 0.0	—	—	—	—	—	—	0°	90.0°	—	—	—	—	—	—

Az važi za zapadno nebo, dok za istočni dio treba uzeti (360° — Az)
τ važi za zapadno nebo, dok za istočni dio treba uzeti (24^h — τ)

pouzdano očitati $0^0,1$. Najveća visina ide do cirka 75^0, što odgovara području satnog kuta i deklinacije, na koje smo se ograničili.

Na apscisi diagrama, na gornjem rubu, označen je satni kut, u mjerilu: 1 minuta = 1 mm (u originalu), što dopušta tačno očitavanje na ½ minute.

Deklinacija i azimut prikazani su krivuljama koje se ispresijecaju. Pri tome zahvaća azimut područje od 0^0 do $135^0.9$ (na zapadu), odnosno od $224^0.1$ do 360^0 (na istoku). Razmak između krivulja za interval od 2^0 varira od 5 do 10 mm kod deklinacije, a od 2.5 do 9 mm kod azimuta (u originalu). Deklinacija se dade pouzdano očitati otprilike na $^1/_5{}^0$, a azimut na $^1/_3{}^0$.

Obzirom na smanjeni format reprodukcije, bit će tačnost očitavanja po istoj razmjerno manja.

Slika važi za zapadni dio neba, dok za istočni dio imamo sebi da zamislimo sve prebačeno simetrično oko ordinatne osi, na lijevom rubu diagrama. Možemo dakle upotrebiti diagram i za istočni dio neba, samo što ćemo mjesto τ uzeti vrijednost $(24^h - \tau)$, a mjesto Az uzet ćemo $(360^0 - Az)$, kako je to uostalom na diagramu izričito naznačeno brojkama u zagradama.

*

A sada ćemo navesti nekoliko primjera s obzirom na upotrebu diagrama kod raznih slučajeva, na koje ćemo u praksi astronomskog motrenja najčešće naići.

Računanje primjera izvedeno je u granicama tačnosti (sekunde vremenske i lučne zaokružene na $^1/_{10}$; interpoliranje obično, linearno i t. d.) u skladu s onom, koju dopušta upotreba grafičke metode, po originalnom diagramu.

I. Traži se visina *H* i azimut *Az* nebeskog tijela, ako je poznat njegov satni kut τ i deklinacija δ.

Zadanu vrijednost τ potražit ćemo na gornjem rubu karte, a onda se spustiti vertikalno do krivulje (odnosno do tačke unutar intervala dviju krivulja), koja odgovara zadanoj deklinaciji. Visinu nad horizontom očitat ćemo na desnom rubu karte. Azimut će se odrediti tako, da će se položaj gore ustanovljene tačke procijeniti okom među krivuljama koje predstavljaju azimut.

P r i m j e r 1a). Kolika je visina H i azimut Az Sunca u Zagrebu, dne 22. III. 1941. u $9^h40^m,0$ srednjo-evrop. vremena, ako je poznata deklinacija δ i satni kut τ?

Satni kut τ naći ćemo tabuliran na pr. u Nautičkom Godišnjaku.[4] Za $8^h40^m,0$ Greenw. vremena (što odgovara $9^h40^m,0$ srednjo-evropskog vremena) slijedi iz Godišnjaka, za Greenw. meridijan . . . . $\tau = 308^0 14',0 = 20^h32^m,9$
Radi razlike u geograf. dužini Zagreb/Greenw.[5] $+ \ 1^h \ 4^m,0$
Na Zagreb. meridijanu je satni kut . . . . $\tau = 21^h36^m,9$[6]

Deklinacija za dan 22. III. 1941. slijedi opet iz Godišnjaka, i to za 12^h Greenw. vremena[7] . . . . $\delta = + \ 0^0,6$

Ako s tim vrijednostima uđemo u diagram t. j. ako se s tačke $21^h36^m,9$ na gornjem rubu diagrama spustimo do krivulje 0^0 i 2^0 koje naznačuju deklinaciju, i procijenimo okom položaj tačke, koja odgovara vrijednosti $\delta = 0^0,6$ unutar intervala spomenutih dviju krivulja, ustanovit ćemo visinu

$$H = 34^0,9$$

Ista tačka, ležeći unutar krivulja 314^0 i 316^0 omogućit će nam, procjenom oka, da očitamo azimut . . . . $Az = 314^0,5$

(Tačnijim računom dobili bismo $H = 34^0 53',4$ i $Az = 314^0 32',8$).

P r i m j e r 1b) Isti slučaj kao 1a), ali uz pretpostavku, da je uz deklinaciju poznata jednadžba vremena e, a nije poznat satni kut τ.

Prije svega treba odrediti satni kut τ. To se može iz poznatog časa motrenja i jednadžbe vremena. Postoji odnos

$$\tau = t_m - 12^h + e \qquad (1)$$

gdje t_m znači lokalno srednje vrijeme, a e razliku između pravog i srednjeg vremena u času t_m.

---

[4] Prije rata izlazio je u redakciji Dra V. V. Miškovića, upravnika Beogradske zvjezdarnice.

[5] Prema naknadno primljenom obavještenju, ustanovio je prof. N. P. Abakumov geografsku dužinu astronomskog paviljona Tehničkog fakulteta na Maksimiru sa: $1^h4^m5^s,11$.

[6] Tačnost na jednu desetinku minute je dostatna, ako se uoči, da diagram dopušta očitavanje satnog kuta samo na ½ minute pouzdano.

[7] Deklinaciju bi trebalo svesti na tačni čas motrenja. Time što smo iz efemerida uzeli vrijednost u podne Greenw. vremena, te zaokružili minute na desetinku stupnja, nastat će pogriješka, koja može doseći maksimalni iznos od desetak lučnih minuta. To je pak unutar granice tačnosti, kojom se deklinacija dade po diagramu uopće očitati.

Srednje lokalno vrijeme u času motrenja bit će, s obzirom na geografsku dužinu Zagreba (4^m istočno od srednjo-evropskog meridijana)

$$t_m = 9^h40^m{,}0 + 4^m{,}0 = 9^h44^m{,}0.$$

Jednadžbu vremena e naći ćemo tabulirano u efemeridama, i to obično od 2 na 2 sata. Za naše svrhe bit će dostatno, da uzmemo vrijednost e u podne[8)] (ili srednju vrijednost između 0^h Greenw. vremena istog dana, i 0^h suslijednog dana), a ta iznosi, dne 22. III. 1941. . . . . $-7^m{,}0$

Dakle

$$\tau = 9^h44^m{,}0 - 12^h - 7^m{,}0 = -2^h23^m{,}0 = 21^h37^m{,}0.$$

Deklinacija slijedi opet iz efemerida, i to za dan 22. III 1941. u podne Greenw. $\delta = +0^0{,}6$.

Iz diagrama možemo očitati, analognim postupkom kao u primjeru 1a) za $\tau = 21^h37^m{,}0$ i $\delta = 0^0{,}6$

visinu Sunca nad horizontom $H = 34^0{,}9$
azimut Sunca . . . . $Az = 314^0{,}6$.

NB. Ovaj slučaj 1b je) običniji nego li onaj pod 1a), jer ćemo u efemeridama uvijek naći vrijednost jednadžbe vremena e, dok onu za satni kut τ nalazimo samo u pojedinim izdanjima astronomskih godišnjaka. Što se tiče sâmog računanja satnog kuta iz jednadžbe vremena e, to ne zadaje više posla nego li preračunavanje satnog kuta iz lučnih kutova u vremensku vrijednost, koje je preračunavanje potrebito u slučaju kao pod 1a).

P r i m j e r 2 a). Neka se odredi visina H i azimut Az Merkura u Zagrebu, dne 12. IV. 1944. u $18^h47^m{,}0$ sred.-evrop. vremena, ako je poznata Merkurova deklinacija δ i rektascensija α.

Iz efemerida slijedi: deklinacija $\delta = +18^0{,}1$
rektascensija $\alpha = 2^h35^m{,}0$.

---

8) Zapravo bi trebalo e svesti na tačni čas motrenja, dakle u našem primjeru na čas $8^h40^m{,}0$ Greenw. vremena (što odgovara 9^h40^m, srednjo-evropskog vremena). Time što ćemo uzeti vrijednost e u podne Greenw. i zaokružiti sekunde na desetinku minute, učinit ćemo pogriješku, koja može maksimalno iznositi desetak sekunda, — a to je opet unutar granice tačnosti, kojom se po diagramu može pouzdano očitati satni kut.

I u ovom slučaju nije satni kut direktno zadan, pa ga treba odrediti iz poznatog časa motrenja i rektascensije.

Poslužit ćemo se poznatim odnosom:

$$\tau = t_z - \alpha \qquad (2)$$

gdje t_z znači čas motrenja, izražen u zvjezdanom vremenu.

Koliko je zvjezdano vrijeme t_z?

Času motrenja $18^h47^m,0$ srednjo-evropskog vremena odgovara $17^h47^m,0$ Greenw. vremena.

Ekvivalentni interval zvjezdanog vremena . .	$17^h49^m,9$
Istog dana u 0^h Greenw. vremena bilo je zvjezdano vrijeme na Greenwichu	$13^h20^m,3$
Zbroj	$31^h10^m,2 =$
	$= 7^h10^m,2$
Prelaz sa Greenw. na Zagreb. meridijan . .	$+ 1^h\ 4^m,0$
Zvjezdano vrijeme t_z	$= 8^h14^m,2$

Dakle satni kut $\tau = 8^h14^m,2 - 2^h35^m,0 = 5^h39^m,2$.[9]

Ako gornju vrijednost potražimo na diagramu, pa se spustimo do tačke, koja leži između deklinacionih krivulja koje odgovaraju 18^0 i 20^0, naći ćemo, procjenom oka, za $\delta = +18^0,1$ visinu $H = 16^0,4$.

Azimut ćemo odrediti po položaju tačke između azimutalnih krivulja 98^0 i 100^0, i to opet procjenom oka: $Az = 99^0,2$.

Računskim putem dobili bismo slijedeći tačniji rezultat:

Visina Merkura nad horizontom $H = 16^0 25',7$
Azimut Merkura . . . . $Az = 99^0 16',3$

NB. Takav slučaj, da se traže horizontalne koordinate kod poznate deklinacije i rektascensije, nametnut će se u praksi dosta često. Tako na pr. kod motrenja za vrijeme sumraka, kad se prostim okom ne vidi nebesko tijelo, a durbin nije snabdjeven paralaktičkom postavom, da bi se mogao usmjeriti na temelju samih podataka o deklinaciji i rektascensiji.

P r i m j e r 2 b). Neka se odredi visina H i azimut Az Merkura u Zagrebu, dne 12. IV. 1944. u $18^h47^m,0$ srednjo-evropskog vremena, dakle isti primjer kao pod 2a), uz pretpostavku, da je pored deklinacije δ poznat čas kulminacije t^k (u sred. vremenu).

---

[9]) Strogim računom dobili bismo:
$\tau = 8^h14^m11,8^s - 2^h35^m0,^s4 = 5^h39^m11,^s4$

Opet nam treba najprije odrediti satni kut τ. U tu svrhu ćemo se poslužiti odnosom:

$$\tau = t_m - t^k \tag{3}$$

gdje t_m znači čas motrenja, a t^k čas prolaza nebeskog tijela kroz gornji meridijan, reduciran na čas motrenja.

Čas motrenja, po Greenw. vremenu je	$17^h 47^m,0$
Čas kulminacije na Greenw. meridijanu, prema efemeridama	$13^h 11^m,9$
Dakle satni kut na Greenw. meridijanu	$4^h 35^m,1$[10]
Prelaz sa Greenw. na Zagreb. meridijan	$1^h \ 4^m,0$
Satni kut Merkura u času motrenja, na Zagreb. meridijanu	$5^h 39^m,1$

Daljnji postupak za određivanje *H* i *Az* bit će analogan onomu u primjeru 2a). Tamo smo našli iz efemerida, za deklinaciju $\delta = 18^0,1$.

Na temelju τ i δ očitat ćemo iz diagrama:

$$H = 16^0,4 \quad \text{i} \quad Az = 99^0,2$$

NB. Iz gornjeg vidimo, da je rješavanje primjera 2 jednostavnije, kad je poznat čas kulminacije, kao u slučaju 2b), nego li kad računamo na temelju rektascensije, kao u slučaju 2a), jer u potonjem slučaju treba preračunavati sred. vrijeme u zvjezdano.

II. Traži se deklinacija δ i satni kut τ ili rektascensija α nebeskog tijela — ako je poznata njegova visina *H* i azimut *Az*.

Kod poznate visine i azimuta može se po diagramu direktno očitati pripadna deklinacija i satni kut. A kod poznatog časa motrenja moći će se računskim putem da odredi i rektascensija, ili obratno. Takav slučaj ćemo imati na pr. kad budemo htjeli da identificiramo nepoznatu zvijezdu, čiju smo visinu i azimut u stanovitom času ustanovili.

---

[10]) K tomu bi trebalo uzeti u obzir varijaciju časa kulminacije u intervalu vremena $4^h 35^m,1$. Iz efemerida možemo ustanoviti, da je čas kulminacije Merkura, dne 13. IV. za $0^m,5$ ranije nego li 12. IV. Dakle će satni kut biti veći, i to u razmaku vremena od $4^1/_2$ sati za cirka $0^m,1$. Nova vrijednost satnog kuta bit će dakle $4^h 35^m,2$ na Greenw. meridijanu, odnosno $5^h 39^m,2$ na Zagreb. meridijanu. Tačnijom interpolacijom, — uzevši u obzir 2. diference —, dobili bismo $\tau = 5^h 39^m 11^s,4$ kako u primjeru pod 2a).

Primjer 3. Motrenjem Merkura u Zagrebu, dne 12. IV. 1944. u $18^h47^m,0$ srednjo-evropskog vremena ustanovljena je visina $H = 16^0,4$ i azimut $Az = 99^0,2$. Kolika je deklinacija, satni kut i rektascensija Merkura u istom času?

Iz diagrama slijedi, za zadane vrijednosti H i Az pripadna deklinacija $\delta = 18^0,1$ i satni kut $\tau = 5^h39^m,2$.

Budući da je poznat čas motrenja $t_m = 18^h47^m,0$, čemu odgovara zvjezdano vrijeme $8^h14^m,2$, kako smo to našli u primjeru 2a), to ćemo iz odnosa (2), koji smo već spomenuli u primjeru 2a), dobiti:

$$\alpha = t_z - \tau = 8^h14^m,2 - 5^h39^m,2 = 2^h35^m,0$$

Ako bismo pretpostavili, da je bila poznata rektascensija a nepoznat čas motrenja, mogli bismo da odredimo ovaj potonji, iz odnosa:

$$t_z = \tau + \alpha = 5^h39^m,2 + 2^h35^m,0 = 8^h14^m,2$$

III. Izlaz i zalaz nebeskih tjelesa

Izlaz i zalaz Sunca i Mjeseca može se naći već tabulirano u svakom astronomskom godišnjaku, za razne geografske širine. Također su u godišnjaku obično navedene interpolacione tablice za preračunavanje izlaza i zalaza sa jedne geografske širine na drugu. Upotreba diagrama u tu svrhu je dakle od manje važnosti. Nema ipak principijelne poteškoće, da se po diagramu odredi satni kut i azimut u času izlaza i zalaza: ako pođemo po diagramu uzduž apscise, t. j. kod $H = 0^0$ moći ćemo, kod poznate deklinacije, direktno očitati pripadni satni kut i azimut.

Razumije se, da diagram daje satni kut »pravog« izlaza i zalaza, za razliku od »vidljivog«. Prvi se odnosi na čas, kad se središte nebeskog tijela nalazi na pravom horizontu, a pod drugim se podrazumijeva čas, kad se gornji rub nebeskog tijela (misli se u prvom redu na Sunce i Mjesec) prividno dotiče horizonta. Korekciju, koju treba uzeti u obzir za prelaz sa »pravog« na »vidljivi« izlaz ili zalaz Sunca, naći ćemo u zbirkama nautičkih tabla. Tim korekcijama će se eliminirati upliv refrakcije, polumjera Sunca, paralakse i visine oka motritelja. Kod Mjeseca neće trebati uopće uzimati takvu korekciju, jer se kod tog nebeskog tijela razni gore spomenuti utjecaji u

glavnom kompenziraju, u vezi s velikom Mjesečevom paralaksom. Što se tiče zvijezdâ i planetâ, tu neće pogotovo trebati da se uzme korekcija, već iz razloga, što se kod njih traži obično samo približni čas izlaza i zalaza.

Spomenut nam je još, da se kod Mjeseca i drugih nebeskih tjelesa, čija se deklinacija u toku dana dosta brzo mijenja, može najprije odrediti po diagramu približni satni kut izlaza i zalaza, uzevši kao deklinaciju vrijednost iz efemerida za 0^h Greenw. vremena. Dobiveni približni satni kut može se upotrebiti, da se iz efemerida nađe tačnija pripadna deklinacija i onda opet po diagramu tačniji satni kut izlaza ili zalaza.

SUMMARY

A Graphical Method of Resolving the Spherical Triangle, for the Geogr. Latitude of Z a g r e b ($\varphi = 45^0 49',5$).

The diagram referred to in this report gives in a single drawing the 4 main elements of the spherical triangle, viz: the declination δ, ranging from $+30^0$ to -30^0, the hour angle τ, the altitude H above the horizon, and the azimuth Az. The values have been computed for the geographic latitude of Zagreb ($\varphi = 45^0 49',5$). The scale of the diagram, in its original size, will permit the values of these quantities to be read with an accuracy approximately as follows: δ about $^1/_5{}^0$, τ — $^1/_2{}^{min}$, H — $0^0,1$ and Az — $^1/_3{}^0$.

By means of the diagram it will be easily possible to obtain graphically the values of any two of the aforementioned elements as soon as the other two are known. Especially the diagram will enable us to convert the equatorial coördinates into the horizontal ones, or vice versa. This case occurs frequently when sighting the stars by means of an instrument lacking a parallactic mounting. In such an instance the use of the diagram will obviate the necessity of lengthy reckoning.

The practical application of the method is illustrated by several examples at the end of the report.

Milenko Sevdić, Zagreb:

PRIDRUŽENI TROKUT I ČETVEROKUT U GEOMETRIJI LOBAČEVSKOGA

Metodom pridruženog trokuta i četverokuta možemo iz relacija dobivenih za trokut izvesti relacije potrebne za rješavanje četverokuta. Već je Lobačevski za izvođenje nekih relacija koristio tu metodu.[1] Njezinu je važnost istaknuo i Liebmann u svojoj radnji o osnivanju hiperbolične geometrije[2]. K. Fladt je izveo [3] ovu korespondenciju na osnovu Pundove[4] konstrukcije paralela neeuklidske geometrije.

U ovome članku će biti pokazano, kako bi se ovo pridruživanje izvelo u Poincaréovoj interpretaciji hiperbolične geometrije.[5]

---

[1] N. Lobatschewsky, *Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien,* Berlin, 1840. — (Preveo Dr. B. Petronijević u Prosvjetnom Glasniku god. 1914, str. 1044—1062 i 1142—1182). — Vidi i V. Varićak, *Prvi osnivači neeukl. geometrije.* (Rad Jugosl. Ak., 169, str. 144).

[2] Liebmann, *Über die Begründung der hyperbol. Geometrie.* Math. An., 59, 115.

[3] K. Fladt, *Neuer Beweis für Zuordnung von rechtwinkligen Dreieck und Spitzeck in d. hyp. Elementargeometrie.* Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wissenschaften. Abteilung A. Jahrg. 1925, 3. Abh.

[4] Pundovu radnju nisam imao pri ruci. Nju citira Fladt u svojoj radnji. Izašla je u Berlin. Math. Gess. 8 Jahrgang 1909. .

[5] Interpretacija koja potječe od Poincaréa (Acta math., t. I, p. 8, t. III., p. 56) uzima da je elemenat luka definiran izrazom:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

i da je prema tome udaljenost dviju točaka dana integralom

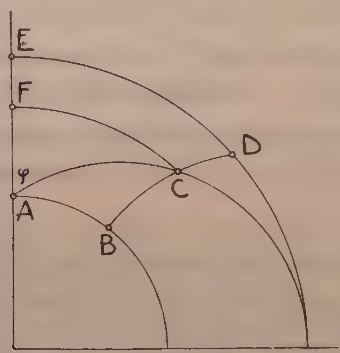
$$s = \int_{y_2}^{y_1} \frac{\sqrt{1 + x'^2}}{y}\, dy.$$

Integracijom dobijemo kao geodetske linije kružnice sa središtem na osi apscisa. Pored L. K. Lahtina (Объ одномъ конкретномъ истолковании планиметрии Лобачевскаго. Матем. Сборникъ XVII, Москва) i A. Shwarza *(Zur Theorie der reellen linearen Transformationen ...,* Wiener Sitzungsber. II, Abt. t. 99, 1890) bavio se ovom interpretacijom i V. Varićak u radnji *»Primjedbe o jednoj interpretaciji geometrije Lobačevskoga«.* (Rad Jugosl. Akad., 154.). — Vidi i Ефимов, Вышая геометрия, Москва 1945, str. 268—271.

Prije nego što četverokutu sa tri prava kuta nađemo pridruženi pravokutni trokut, a zatim obrnuto zadanome trokutu pridruženi četverokut, dokazat ćemo ovaj teorem:

Ako je (sl. 1.) AB i DE okomito na AE i ako je AC paralela sa ED, koja pripada dužini AE, pa ako iz D spustimo okomicu na AB, koja paralelu siječe u točki C, onda je $DE = AC$.

Drugim riječima, ovaj nam teorem kaže kako se u ovoj interpretaciji zadani segment prenosi s jednog pravca na drugi paralelan pravac.



Sl. 1

Teorem dokazujemo ovako:

Kroz točku C povučemo pravac okomit na AE (sl. 1.). On siječe AE u točki F. *Kut* paralelnosti, koji pripada dužini AE, označit ćemo sa φ, pa je

$$\varphi = \Pi(AE). \tag{1}$$

U trokutu ACF vrijedi relacija[6])

$$\cos \Pi(AC) \cdot \cos \varphi = \cos \Pi(AF). \tag{2}$$

Ovu jednadžbu, kao i slijedeće, mogli bismo pisati i tako, da uzmemo u obzir poznate relacije, koje postoje između trigonometrijskih funkcija kuta paralelnosti i hiperboličnih funkcija pripadnih dužina.[7])

Kako je paralela AC pravac, koji prolazi kroz ishodište i sa osi ξ zatvara kut φ, glasi njegova jednadžba[8])

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \Pi(\xi) \cos \Pi(\eta). \tag{3}$$

---

6) V. Varićak, *Primjedbe*, str. 95, jedn. (13).

7) V. Varićak, *Osnivači*, str. 153-154.

8) V. Varićak, *Primjedbe*, str. 94, jedn. (12).

Točka C leži na tome pravcu, pa možemo pisati ovako:

$$\operatorname{tg} \Pi (AE) = \operatorname{tg} \Pi (AF) \cdot \cos \Pi (CF)$$

ili
$$\operatorname{tg} \Pi (AE) \cos \Pi (AF) = \sin \Pi (AF) \cos \Pi (CF) . \tag{4}$$

Jednadžba pravca BD, koji stoji okomito na η-osi i na njoj odsijeca segment AB, glasi[9])

$$\cos \Pi (\eta) \sin \Pi (\xi) = \cos \Pi (AB) .$$

Na tome pravcu leži točka C, pa mora biti

$$\cos \Pi (CF) \sin \Pi (AF) = \cos \Pi (AB) \tag{5}$$

ali na tome pravcu leži i točka D, pa imamo

$$\cos \Pi (DE) \sin \Pi (AE) = \cos \Pi (AB) . \tag{6}$$

Izjednačimo li (5) i (6) dobijemo

$$\cos \Pi (CF) \sin \Pi (AF) = \cos \Pi (DE) \sin \Pi (AE) . \tag{7}$$

Zbog (7) možemo (4) pisati

$$\operatorname{tg} \Pi (AE) \cos \Pi (AF) = \cos \Pi (DE) \sin \Pi (AE)$$

ili
$$\cos \Pi (AF) = \cos \Pi (DE) \cdot \cos \Pi (AE) \tag{8}$$

Stavimo li (8) u (2) imamo

$$\cos \Pi (AC) \cdot \cos \varphi = \cos \Pi (DE) \cdot \cos \Pi (AE)$$

no zbog $\varphi = \Pi (AE)$ slijedi

$$\cos \Pi (AC) = \cos \Pi (DE)$$

ili
$$AC = DE .$$

Time je teorem dokazan.

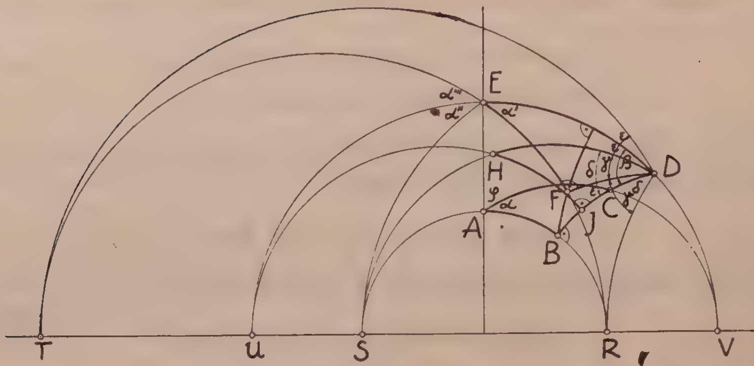
Uzmimo sada (sl. 2.) četverokut $ABDE$ s tri prava kuta kod A, B i E, te šiljastim kutom β kod D. Točkom A povući ćemo sa stranicom DE paralelu sa kutom paralelnosti φ, koji pripada dužini AE. Paralela siječe stranicu BD u točki C. U pravokutnom trokutu ABC kut α je kompletni kut kutu paralelnosti φ, t. j.

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha ,$$

dok su stranice toga trokuta: AB, AC, BC.

---

9) Ibid., str. 90., jedn. (9).



Sl. 2

Vidimo da je stranica AB trokuta ujedno i stranica četverokuta. Prema dokazanom teoremu slijedi da je stranica AC trokuta jednaka stranici DE četverokuta. Nadalje je kut α trokuta u vezi sa stranicom AE četverokuta, naime

$$AE = \mathrm{D}(\varphi) = \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Da je i kut β četverokuta u vezi sa stranicom BC trokuta i da je on u stvari kut paralelnosti, koji pripada toj stranici BC, pokazat ćemo pomoću dva trokuta, koja su sukladna s trokutom ABC.

Ponajprije trokutu ABC odgovara sukladni trokut EFD. To razabiremo ovako:

Točkom E povučena paralela sa AB pripada istoj dužini AE kao i paralela AC, pa je

$$\alpha = \alpha'$$

Ako iz točke B spustimo okomicu na ED, siječe ona paralelu ER u točki F, pa je opet prema prethodnom teoremu

$$EF = AB.$$

Budući da je $EF = AB$; $DE = AC$ i $\alpha' = \alpha$, to je

$$\Delta FED \cong \Delta ABC. \tag{9}$$

Odatle slijedi

$$DF \perp EF$$

jer je i

$$BC \perp AB$$

a pored toga je

$$DF = BC. \tag{10}$$

Treći trokut sukladan s ova dva dobijemo ovako: Kroz točku D povučemo lijevu i desnu paralelu DT i DR sa FR, koje pripadaju dužini DF. Prema tome je DF raspolovnica kuta TDR, jer je kut TDF jednak kutu FDR, pošto su to kutevi paralelnosti za istu dužinu. Označimo ih sa

$$\gamma = \sphericalangle TDF = \sphericalangle FDR.$$

Točkom D povučemo još paralelu DS prema BS (AB), koja odgovara dužini BD. Budući da je i DR paralela prema BR za istu dužinu BD, to je

$$\sphericalangle SDB = \sphericalangle BDR = \delta.$$

Ako sada povučemo pravac IU okomito na BD tako, da mu za dužinu DI odgovara paralela DE s kutom paralelnosti β, onda dobijemo pravokutan trokut DIH s pravim kutom kod I.

Sukladnost trokuta DIH s trokutom DFE, a prema tome i s trokutom ABC, dokazat ćemo ovako:

Iz slike vidimo da je

$$\alpha' = \alpha''' \text{ (kao vršni kutevi)},$$

no α' je kut između pravca EV i pravca ER (desna paralela za dužinu EA), a taj je jednak sa α'', jer je to kut između istog pravca EV i pravca ES (lijeva paralela za istu dužinu EA). Prema tome je

$$\alpha'' = \alpha'''.$$

Dakle je EU raspolovnica kuta TES, a prema tome i kuta TDS, jer je $DT \parallel ET$ i $DS \parallel ES$, pa imamo

$$\sphericalangle TDE = \sphericalangle EDS = \varepsilon.$$

Iz slike vidimo da je

$$\delta = \gamma - \varepsilon \tag{11}$$

kut paralelnosti za dužinu DF. No kut δ imamo i u trokutu HDI, pa je prema tome

$$\sphericalangle EDF = \gamma - \varepsilon = \delta = \sphericalangle HDI.$$

Iz slike nadalje vidimo da je

$$\delta + \varepsilon = \beta = \Pi(DI) \tag{12}$$

a iz (11) imamo

$$\delta + \varepsilon = \gamma$$

pa je

$$\gamma = \beta = \Pi(DI)$$

ali isto tako imamo, da je γ kut paralelnosti za dužinu DF, t. j.

$$\gamma = \Pi(DF). \tag{13}$$

Prema tome jednakim kutevima paralelnosti β pripadaju i jednake dužine

$$DI = DF \tag{14}$$

pa je

$$\Delta DHI \cong \Delta DEF,$$

a zbog (9) imamo

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF \cong DHI.$$

Dakle je zbog (10) i (14)

$$DI = BC$$

a zbog (12)

$$BC = \mathrm{D}(\beta).$$

Time je pokazana tražena veza između stranice BC trokuta i šiljastog kuta β četverokuta.

*

Obrnuto ako želimo pravokutnom trokutu ABC naći pridruženi četverokut $ABDE$, onda ćemo to u ovoj interpretaciji lako izvesti:

U točki A uzdignemo okomicu AE na stranicu AB. Zatim produžimo stranicu AC i s njom povučemo paralelu, koja će biti okomita na AE. Produžena stranica BC siječe tu paralelu u točki D, koja je vrh četverokuta sa šiljastim kutom β.

*

Na koncu mogu spomenuti, da se ovaj postupak pridruživanja dade protegnuti i na peterokut sa četiri prava kuta samo se kao pridruženi trokut dobija kosokutan trokut. Zanimljiv je slučaj peterokuta sa svih pet pravih kuteva, gdje se dobija 20 pridruženih trokuta i 10 pridruženih četverokuta. Poseban se zaključak dade izvesti kod pravokutnog šesterokuta.

RÉSUMÉ

Le triangle et quadrilatère associés dans la géométrie de Lobačevski.

On raisonne sur l'image de Poincaré de la géométrie de Lobačevski. On a démontré le théorème suivant:

Si AB et CD sont perpendiculaires à AE (v. fig. 1) et si AC est la droite parallèle avec ED et correspondant à la distance AE et si la perpendiculaire sur AB menée par le point D coupe la parallèle AC en C, alors $DE = AC$.

Le théorème montre de quelle manière on transporte un segment d'une droite sur une autre droite parallèle à la première.

Considérons le quadrilatère $ABDE$ et le triangle ABC (fig. 2); AB étant leur côté commun, on aura, d'après le théorème précédent, $AC = DE$. Puisque $\Delta EFD \cong \Delta ABC \cong \Delta DIH$, on voit que l'angle β du quadrilatère est l'angle du parallèlisme associeé à la distance BC. Des formules (10) et (11) on conclut à l'égalité $DI = BC$ et par conséquent, vu (12), à l'égalité

$$BC = \Pi(\beta).$$

On à montré également le mode d'associer un quadrilatère à un triangle, ABC: Au point A on considère la perpendiculaire AE sur le côté AB; on prolonge AC; on considère la droite parallèle à AC et qui est perpendiculaire sur AE; cette parallèle et la droite BC se coupent dans un sommet, D, du quadrilatère avec l'angle β.

Dr. S. Škreb

ELEMENTARNI IZVOĐAJ BAROMETRIČKOG RAČUNANJA VISINE

Otkako je Toricelli (1644) konstatovao, da je visina stupca žive u barometru u ravnoteži sa tlakom uzduha, a Pascal zamislio i Perier izveo eksperimenat, da se stupac žive visinom nekako proporcionalno smanjuje, dana je mogućnost, da se iz visine stupca žive na dva mjesta raznih visina nađe relativna visina jednog mjesta prema drugomu.

Formula za taj račun relativne visine izvodi se u meteorološkim udžbenicima redovno iz diferencijalne t. zv. »statičke« jednadžbe atmosfere pomoću integracije. U elementarnim se udžbenicima ne možemo služiti infinitezimalnim računom i zato se iz fizikalne obuke izostavlja račun visine pomoću barometra, i ako nam u praksi može vrlo dobro poslužiti. Tim se postupkom služe i geodeti kod nivelacije 3. reda. Ovdje je dan jedan elementarni izvođaj, koji vodi do istog rezultata odnosno iste formule.

Ako je visina stupca žive u barometru na nižoj postaji b_1 (kod 0^0) a temperatura uzduha na istoj postaji t_1 dok je istodobno na postaji, koja je Vm viša b_2 i t_2, to je težina uzduha između obje postaje $(b_1 - b_2) \cdot 13{,}6$ gdje je 13,6 specifična težina žive. Ako je b mjeren u cm, onda je tlak odnosno težina dana u gr/cm^2, ako je b u mm onda je tlak u kg/m^2.

Pretpostavljamo b mjeren u mm, pa dobivamo težinu zraka među obim postajama u kg/m². Ako tu a p s o l u t n u težinu zraka podijelimo sa s p e c i f i č n o m težinom izrečenom u kg/m³, to dobivamo v o l u m e n. Kako je pak taj volumen izražen u stupcu nad jediničnom plohom (m²), dobivamo za mjerni broj volumena mjerni broj v i s i n e stupca zraka u m, a to je r a z l i k a v i s i n a n a š i h p o s t a j a, izražena u metrima. Dakle je

$$V = \frac{(b_1 - b_2)\ 13{,}6}{s}.$$

To je eto fizikalna osnovica za mjerenje relativne visine pomoću barometra. No tu nam specifična težina pravi nepri-

lika, jer se ona mijenja i tlakom i temperaturom. Jedan kubni metar uzduha (bez vlage), teži (kod 0^0 C i 760 mm Hg) 1,293 kg, ali općenito je

$$s = \frac{1{,}293}{1 + \alpha t} \cdot \frac{b}{760}.$$

No, kod računa visine imamo izmjerena dva tlaka i dvije temperature, a potom i dvije specifične težine. Tu si pomažemo, kao i inače, da uzmemo neku srednju specifičnu težinu, koju dobivamo iz srednjega tlaka

$$b_m = \frac{b_1 + b_2}{2}$$

i iz srednje temperature

$$t_m = \frac{t_1 + t_2}{2}, \text{ pa je}$$

$$V = \frac{b_1 - b_2}{b_m} \cdot (1 + \alpha t_m) \cdot \frac{760 \cdot 13{,}6}{1{,}293}.$$

Ako izračunamo zadnji brojevni faktor, dobivamo 7991 m, a taj broj možemo na osnovi jednakog rezoniranja (aps. tež : spec. tež. = visina) tumačiti kao visinu čitave atmosfere, kad bi bila jednako gusta od dna do vrha (uz 0^0 C). Do jednakog broja dolazimo kad nađemo omjer specifičnih težina žive i zraka (prema vodi) 13,6 : 0,001293 = 10514 i taj broj pomnožimo sa visinom stupca žive (normalnom) t. j. 0,76 m = 7991 m. To je stupac zraka jednako težak kao stupac žive od 0,76 m, ali jednake specifične težine od dna do vrha.

Takva je atmosfera fizikalno dakako nemoguća, jer donji slojevi stoje pod većim tlakom, pa je taj pomoćni broj samo matematička fikcija i zovemo ga »visinom homogene atmosfere«, a označujemo s H. Brojevno se računa s okruglo 8000 m. Sad imamo konačno

$$V = \frac{H \cdot (1 + \alpha t_m)}{b_m} (b_1 - b_2)$$

To je formula za računanje relativne visine pomoću barometra. Prvi se dio

$$\frac{H \cdot (1 + \alpha t_m)}{b_m}$$

te formule zove još i »barometričkom visinskom stopom«, jer nam daje broj metara za koji se moramo dignuti, da barometar padne za 1 mm. Za manje visine je taj broj oko 11 m. Kad tu stopu množimo s brojem milimetara razlike $b_1 - b_2$, dobivamo dakako čitavu razliku visine. Međutim, ovaj barometrički račun visine ne zadovoljava svom strogošću geodetske nivelacije, jer su česti otkloni od prave visine unutar $\pm 2\,^0/_0$ kod 1000 m. Redovno se te pogreške pripisuju tome da nije ispravna »srednja« temperatura ili da se ne uzima vlaga u obzir, no izvor pogreške leži na drugom mjestu. Ako uzmemo da je srednja temperatura 0^0, onda je

$$\frac{V}{H} = \frac{b_1 - b_2}{b_m}.$$

Budući da je lijeva strana konstanta, to bi i desna morala biti uz gornji uvjet konstantna odnosno kod drugih temperatura čista funkcija temperature. Međutim, diferencija tlaka nije stroga funkcija srednjeg tlaka, pa uz jednaki srednji tlak mogu, u nevelikom intervalu, postojati razne diferencije tlaka. Dakle razlog otklonima leži u tom, ako hoćemo općenito reći, što gornji tlakovi nisu stroge funkcije donjih i obratno.

Od 400 računanih visina na osnovi bilježenja meteoroloških stanica Zagreb i Sljeme (stara planinarska kuća) dobivamo rezultat da je kod $90^0/_0$ vrijednosti otklon od prave vrijednosti manji od $\pm$ 10 m, a kod $50^0/_0$ vrijednosti manji od $\pm$ 4 m uz razliku visina od 764 m. Kako barometar na stanici Zagreb ima apsolutnu visinu od 163 m, to je apsolutna visina barometra u staroj planinarskoj kući bila 937 m. Nova meteorološka stanica u Tomislavovu domu ima apsolutnu visinu 1811 m.

U meteorološkim udžbenicima se upozorava da su zimi visine premalene, a ljeti prevelike. Iz grafičkog prikaza spomenutih 400 računanih relativnih visina Zagreb—Sljeme dobiva se, da je koeficijenat rastezanja zraka poprečno

$$\frac{1}{300}, \text{ a ne } \frac{1}{273}$$

kako ga fizikalno uzimamo. Dakako to vrijedi samo za račun visine. Tim bi se razlika među visinama zimi i ljeti nešto smanjila, ali glavni razlog otklona leži u varijaciji diferencije prema srednjem tlaku. Uzmimo primjer iz god. 1902.:

7. I.	$b_m = 718{,}0$	$b_1 - b_2 = 67{,}6$	$t_m -\ 2{,}3$	visina 759 m
26. VII.	718,0	64,6	22,3	„ „ 778.

Tu vidimo, da uz jednaki tlak imamo razne diferencije, što se temperaturom ne kompenziraju i zimi je relativna visina premalena, a ljeti previsoka prema pravoj 764 m.

Uvodno je spomenuto, da se ta formula visine izvodi redovno iz statičke jednadžbe atmosfere : $dp = -g . \varrho \, dz$, gdje je dp razlika tlaka, $g \varrho$ spec. težina, a dz razlika visine. Iz toga vidimo, da je naša osnovna jednadžba fizikalno jednaka, samo u konačnoj formi. Integracijom i raznim transformacijama dobiva se konačno jednadžba za račun visine (ako ostavimo naravne logaritme)

$$V = 8000 \cdot (1 + \alpha t_m) \ (log\ nat\ b_1 - log\ nat\ b_2)$$

Ta se jednadžba razlikuje samo u zadnjem faktoru od naše, no kako je

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{1 + x}{1 - x}$$

gdje je

$$x = \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2},$$

možemo zadnji faktor razviti u red:

$$log\ nat\ \frac{b_1}{b_2} = 2 \left\{ \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2} + \frac{1}{3} \left(\frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2} \right)^3 + \ldots\ldots \right.$$

Kako u našem slučaju drugi član i viši članovi ne mogu utjecati, to imamo

$$(log\ nat\ b_1 - log\ nat\ b_2) = \frac{b_1 - b_2}{\dfrac{b_1 + b_2}{2}}$$

a to je identično s našom formulom.

Vidimo dakle da ovim izvođajem bez infinitezimalnog računa dobivamo jednaki rezultat za račun visina.

---

1) Hann — Suring. Lhbch. d. Met. V. Aufl. p. 235.

UGAO ZA SVAKOGA

SMRT VELIKIH MATEMATIČARA I FIZIČARA

Tokom rata Jugoslavija je izgubila svoja dva velika matematička pretstavnika: Vladimira Varićaka (1865—1942) i Mihaila Petrovića (1868—1943) kao i velikog inženjera-izumioca Nikolu Teslu (1856—1943). Također su umrli i najveći matematičari našeg doba: Francuz Emile Picard (1856—1942) i Nijemac David Hilbert (1862—1943) kao i veliki matematičari i fizičari: Amerikanac George Birkhoff (1884—1944), Rus Aleksej N. Krilov (1863—1945), Francuzi Henri Lebesgue (1875—1944) i Paul Langevin (1871—1946) te Poljak Stefan Banach (1892—1946).

U slijedećim brojevima Glasnik će donijeti prikaz o radovima tih velikih ljudi.

IZRAČUNAVANJE VOLUMENA I OPLOŠJA n-DIMENZIONALNE KUGLE

I. Dr. ing. Danilo Blanuša, Zagreb

Poopćujući jednu poznatu metodu[1]) za izračunavanje određenog integrala $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$, koju su već upotrebljavali Poisson i Gauss, razmatramo n-dimenzionalni mjerni politop (analogon kocke), kojemu je središte u ishodištu, a bridovi dužine $2a$ neka su paralelni s koordinatnim osima. Integracija funkcije

$$e^{-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}$$

preko područja toga mjernog politopa daje n-struki integral

$$S(a) = \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-a}^{a}\ldots\int\limits_{-a}^{a} e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}\,dx_1\ldots dx_n, \qquad (1)$$

kojemu se integrand sastoji iz produkta funkcija

$$e^{-x_i^2} \quad (i=1,2,\ldots,n),$$

a svaka od tih funkcija ovisi samo o jednoj varijabli. Integral se stoga raspada u n jednakih faktora:

$$S(a) = \left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\right)^n. \qquad (2)$$

---

[1]) Vidi na pr. Serret-Scheffers: Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, II. Bd. (Leipzig u. Berlin 1921) str. 374.

Analogon kugle sa središtem u ishodištu i polumjerom R je hiperploha [$(n-1)$ - dimenzionalan zakrivljen prostor], kojoj jednadžba glasi:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = R^2. \tag{3}$$

Mjerni politop, koji je toj kugli (tako ćemo je zvati) opisan, imat će brid $2R$, dok će upisanom mjernom politopu glavna dijagonala biti

$$D = 2R. \tag{4}$$

Zbog poopćenog Pitagorina poučka izlazi

$$D^2 = (2a)^2 + (2a)^2 + \ldots + (2a)^2 = n\,(2a)^2, \tag{5}$$

tako da je brid upisanog politopa

$$2a = \frac{D}{\sqrt{n}} = \frac{2R}{\sqrt{n}}. \tag{6}$$

Zamislimo kuglu rastavljenu u kugline ljuske volumena $dV = O_n\, dr$, gdje je

$$O_n(r) = o_n\, r^{n-1} \tag{7}$$

oplošje kugle polumjera r, a o_n još nepoznata konstanta, to dobijemo integracijom rečene funkcije preko volumena cijele kugle integral

$$I(R) = \int_0^R o_n\, r^{n-1} e^{-r^2}\, dr, \tag{8}$$

pri čemu smo pisali r^2 mjesto $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$. Jasno je, da mora vrijediti

$$S(R) > I(R) > S\left(\frac{R}{\sqrt{n}}\right), \tag{9}$$

jer opisani mjerni politop uključuje kuglu, a ova uključuje upisani politop, dok je integrand svagdje pozitivan. Granični prijelaz $R \to \infty$ daje za lijevi i desni član nejednadžbe isti limes

$$S(\infty) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^n, \tag{10}$$

pa stoga i srednji član ima taj limes, dakle

$$o_n \int_0^{\infty} r^{n-1} e^{-r^2}\, dr = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^n. \tag{11}$$

Supstitucija $r^2 = y$ daje

$$\int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y} dy = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \tag{12}$$

i analogno

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}} e^{-y} dy = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \tag{13}$$

dakle

$$o_n = \frac{2\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \tag{14}$$

Time su oplošje

$$O_n(r) = \frac{2\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^{n-1} \tag{15}$$

i volumen

$$V_n(r) = \frac{O_n r}{n} = \frac{2\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^n}{n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^n = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} r^n \tag{16}$$

»n-dimenzionalne kugle« izraženi pomoću gama-funkcije.

Na temelju poznatih relacija

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \text{i} \quad \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

lako je dobiti slučajeve takog i lihog n:

$$o_{2m} = \frac{2\pi^m}{(m-1)!}; \qquad o_{2m+1} = \frac{2^{2m+1}\, m!\, \pi^m}{(2m)!}. \tag{17}$$

Prednost je ove metode, da izravno dovodi do zajedničke formule (14), dok direktno izračunavanje volumena integracijom[2]) vodi najprije na formule (17), koje tek treba sažeti pomoću gama-funkcije u jednu[3]).

---

[2]) Vidi na pr. P. H. Schoute: Mehrdimensionale Geometrie, II. Teil (Leipzig 1905, Sammlung Schubert XXXVI) str. 288.

[3]) Jedna druga metoda po Dirichletu vodi također do izraza s gama-funkcijom (vidi Serret-Scheffers, l. c. str. 426).

Mogli smo istina i ovom našom metodom izravno doći na formule (17). Trebamo samo uočiti, da je $o_2 = 2\pi$, što daje

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi} \tag{18}$$

(a to je baš ona metoda, na koju smo na početku aludirali), zatim parcijalnom integracijom ustanoviti relaciju rekurzije

$$\int_0^{\infty} r^{n-1} e^{-r^2}\, dr = \frac{n-2}{2} \int_0^{\infty} r^{n-3} e^{-r^2}\, dr, \tag{19}$$

pa razlikujući tako i liho n doprijeti do formula (17).

II. Vladimir Devidé, Zagreb

Pod n-dimenzionalnom kuglom K razumijeva se skup onih točaka S n-dimenzionalnog linearnog prostora sa Euklidovom metrikom, koje su od jedne čvrste točke S toga prostora udaljene za manje od r ili upravo za r. S je središte te kugle, a r njen radius. Prema tome je jednodimenzionalna kugla dužina, dvodimenzionalna kugla krug, a trodimenzionalna kugla obična kugla. Postavimo li dakle u taj n-dimenzionalni prostor Kartezijev koordinatni sustav s međusobno okomitim osima X_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ i ishodištem u S, bit će n-dimenzionalna kugla skup onih skupina $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ od n realnih brojeva (koordinate točke S) koje zadovoljavaju relaciju

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq r^2.$$

Kao volumen V_n te kugle definirat ćemo sada vrijednost n-terostrukog integrala

$$\int\int \ldots \int dx_1\, dx_2 \cdot \ldots \cdot dx_n$$

protegnutog preko područja K. Po toj je definiciji V_1 duljina $2r$ dužine, V_2 površina πr^2 kruga, a V_3 volumen $\frac{4}{3}\pi r^3$ trodimenzionalne kugle.

Kao oplošje O_n kugle K definirat ćemo mjerni broj $(n-1)$-dimenzionalne tvorevine koju čine »rubne« točke kugle K, dakle točke kojih koordinate zadovoljavaju relaciju

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = r^2,$$

izmjerene volumenom V'_{n-1} $(n-1)$-dimenzionalnog analogona jedinične kocke kao jedinicom. Prema tome je O_1 par krajnjih točaka dužine, O_2 duljina $2\pi r$ opsega kruga, a O_3 oplošje $4\pi r^2$ kugline plohe.

No prema gornjim definicijama možemo odrediti V_n i O_n i onda, kad je n cijeli broj veći od 3. Tako bi na pr. volumen četverodimenzionalne kugle bio

$$\int_{-r}^{+r} dx_1 \int_{-\sqrt{r^2-x_1^2}}^{\sqrt{r^2-x_1^2}} dx_2 \int_{-\sqrt{r^2-x_1^2-x_2^2}}^{\sqrt{r^2-x_1^2-x_2^2}} dx_3 \int_{-\sqrt{r^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2}}^{\sqrt{r^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2}} dx_4 = \frac{\pi^2}{2} r^4.$$

Ali umjesto da ovako za neki određeni n računamo V_n, možemo naći i općenite izraze za V_n i O_n.

Stavimo najprije $V_n = v_n r^n$, $O_n = o_n r^{n-1}$. v_n i o_n sada zavise samo o n, a ne zavise više o polumjeru r kugle K.

Siječemo li kuglu K $(n-1)$-dimenzionalnim »paralelnim hiperravninama« $E(x)$, t. j. uzmemo li one skupine $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ u kojima je $x_n = x$, $(-r \leqq x \leqq +r)$ bit će svaki presjek $(n-1)$-dimenzionalna kugla radiusa

$$\varrho = \sqrt{r^2 - x^2}$$

u $(n-1)$-dimenzionalnoj hiperravnini

$$\{X_1, X_2, \ldots X_{n-1}, x\}.$$

Između ravnina $E(x)$ i $E(x+dx)$ bit će dakle elemenat volumena kugle K

$$dV_n = v_{n-1}\, \varrho^{n-1}\, dx = v_{n-1} \left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^{n-1} dx$$

pa izlazi da je

$$V_n = v_{n-1} \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^{n-1} dx.$$

Stavimo li $x = r \cdot \sin\varphi$, $dx = r \cdot \cos\varphi\, d\varphi$ dobivamo

$$V_n = v_{n-1}\, r^n \cdot 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \varphi\, d\varphi.$$

Kako je za parno $n = 2m$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} \varphi \, d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2m)} \cdot \frac{\pi}{2}$$

a za neparno $n = (2m + 1)$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} \varphi \, d\varphi = \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2m)}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m+1)}$$

to je za parno $n = 2m$ (radi $v_1 = 2$):

$$V_{2m} = 2^{2m} \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \ldots \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2m)} \, r^{2m} =$$

$$= \frac{\pi^m}{m!} \, r^{2m}, \tag{1a}$$

a za neparno $n = 2m + 1$:

$$V_{2m+1} = 2^{2m+1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \ldots \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2m)}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m+1)} \, r^{2m+1} =$$

$$= \frac{2^{2m+1} \pi^m (m!)}{(2m+1)!}. \tag{1b}$$

U drugu ruku, razdijeli li se kugla K u kugline ljuske debljine $d\varrho$ i volumena $o_n \, \varrho^{n-1} \, d\varrho$ nalazi se da je

$$V_n = o_n \int_0^r \varrho^{n-1} \, d\varrho = \frac{o_n}{n} \, r^n,$$

dakle $o_n = n \cdot v_n$. Odatle:

$$O_{2m} = \frac{2\pi^m}{(m-1)!} \, r^{2m-1}, \quad O_{2m+1} = \frac{2^{2m+1} \pi^m (m!)}{(2m)!}.$$

Iz formula (1) i (2) nalazimo sada vrijednosti O_n i V_n za kakav god n; na pr.:

n		O_n	V_n
1	dužina . .	$2 r^0$	$2 r^1$
2	krug. . . .	$2 \pi r^1$	πr^2
3	kugla . . .	$4 \pi r^2$	$\frac{4}{3} \pi r^3$
4		$2 \pi^2 r^3$	$\frac{1}{2} \pi^2 r^4$
5		$\frac{8}{3} \pi^2 r^4$	$\frac{8}{15} \pi^2 r^5$

i t. d.

LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA I. REDA BERNOULLI-EVA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA

I. Jednadžba oblika

(1) $$\frac{dy(x)}{dx} + p(x)\,y(x) = q(x)$$

zove se obična linearna dif. jednadžba I. reda; p i q su proizvoljne ali neprekidne funkcije od x. Ova jednadžba ima svoja dva poznata načina rješenja po 1) Bernoulli-u i 2) Lagrange-u. Bernoulli-ev način rješenja sastoji se u uvođenju novih funkcija u i v ($y = u \cdot v$); Lagrange-ov način je poznat pod imenom varijacija konstante. Ta dva načina (ili bar jedan od njih) mogu se naći u svakom udžbeniku o običnim diferencijalnim jednadžbama I. reda. Ima još jedan poznati treći način za rješenje lin. dif. jednadžbom I. reda, a to je posredno rješenje putem faktora integracije.

A) Pokazat ćemo ovdje, kako je moguće vrlo jednostavno direktno riješiti jednadžbu (1), ako je množimo nekim faktorom $\lambda(x)$ a to je faktor integracije primjenjen specijalno na lin. dif. jedn. I. reda:

(2) $$\lambda(x)\,y' + \lambda p y = \lambda q$$

Uzmimo da je λ takav, da lijeva strana bude derivacija od λy po x: t. j. $\frac{d}{dx}(\lambda y)$. Da bi to bilo, stavljamo:

$$\lambda p = \lambda'$$

Odavde:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = p; \quad \lambda = e^{\int p dx}$$

Sada jednadžba (2) izgleda:

$$\lambda y' + \lambda' y = \lambda q$$

$$\frac{d}{dx}(\lambda y) = \lambda q$$

$$\lambda y = \int \lambda q\, dx + k$$

Uvrstimo vrijednost od λ:

$$e^{\int p dx} \cdot y = \int q\, e^{\int p dx}\, dx + k$$

I konačno:

$$y = e^{-\int p dx}\left[\int q\, e^{\int p dx}\, dx + k\right]$$

Ovo je poznati konačni oblik općeg rješenja (ili općeg integrala) lin. dif. jedn. I. reda. Izveli smo ga direktnom primjenom faktora integracije.

B) Predpostavljamo da jednadžba (1) ima oblik rješenja:

(3) $$y = \frac{u}{v}$$

Množimo jednadžbu (3) sa v, deriviramo po x, zatim dijelimo sa v:

$$vy = u$$

$$vy' + v'y = u'$$

(4) $$y' + \frac{v'}{v}y = \frac{u'}{v}$$

Da bi jednadžba (4) bila identična sa (1), stavljamo:

$$\frac{v'}{v} = p; \quad \frac{u'}{v} = q.$$

Odavde izračunamo v i u:

$$v = e^{\int p dx}$$

$$u' = q v = q e^{\int p dx}$$

$$u = \int q e^{\int p dx} + k$$

Uvrstimo li vrijednosti od u i v u jednadžbu (3), imamo konačni oblik općeg integrala jednadžbe (1):

$$y = e^{-\int p dx} \left[\int q e^{\int p dx} d x + k\right]$$

II. Bernoulli-eva dif. jednadžba.

Svaka jednadžba oblika

(1) $$y'(x) + p(x) y^{n+1} = q(x) y(x)$$

zove se Bernoulli-eva.

Pretpostavljamo da je njeno rješenje:

(2) $$v y^n = u$$

Podijelimo sa y^n i derivirajmo po x:

$$v = \frac{u}{y^n}$$

$$v' = \frac{u' y^n - n u y^{n-1} \cdot y'}{y^{2n}}$$

Odavde:

(3) $$y' + \frac{v'}{n u} y^{n+1} = \frac{u'}{n u} y.$$

Isporeďujući jednadžbe (1) i (3) dobijamo:

$$\frac{u'}{n u} = q; \quad \frac{v'}{n u} = p.$$

$$\frac{u'}{u} = n q; \quad l u = n \int q d x$$

$$u = e^{n \int q dx}$$

$$v' = n p u = n p e^{n \int q dx}$$

$$v = n \int p e^{n \int q dx} + k$$

U jednadžbu (2) uvrstimo vrijednosti od u i v i razriješimo po y:

$$y = \sqrt[n]{\frac{u}{v}} = \sqrt[n]{\frac{e^{n \int q dx}}{n \int p e^{n \int q dx} d x + k}}$$

$$y = \frac{e^{\int q dx}}{\sqrt[n]{n \int p e^{n \int q dx} d x + k}}$$

Ovo je opći integral Bernoulli-eve diferencijalne jednadžbe.

Brčić-Kostić Mato, Subotica.

JEDNAČINE POLARA KRIVIH LINIJA DRUGOGA REDA

Jedan elementaran način za određivanje jednačina polara krivih linija drugoga reda pretstavljen je slijedećim izlaganjem.

Neka je zadana elipsa: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ i tačka $P(x\ ,\ y\ )$ koje leže u istoj ravni ali se tačka nalazi van elipse. Ako iz posmatrane tačke povučemo tangente na zadatu elipsu, onda će one dodirivati elipsu u dvema tačkama, recimo $M_1(x_1,\ y_1)$ i $M_2(x_2,\ y_2)$. Jednačine tih tangenata su date izrazima:

$$\left.\begin{aligned} b^2 x\, x_2 + a^2 y\, y_2 &= a^2 b^2 \\ \text{i}\quad b^2 x\, x_1 + a^2 y\, y_1 &= a^2 b^2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Kako navedene tangente (1) prolaze i kroz tačku $P(x_0,\ y_0)$, to koordinate ove tačke moraju zadovoljavati i jednačine tangenata te imamo:

$$\left.\begin{aligned} b^2 x_0\, x_2 + a^2 y_0\, y_2 &= a^2 b^2 \\ \text{i}\quad b^2 x_0\, x_1 + a^2 y_0\, y_1 &= a^2 b^2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ako drugu od ovih dveju jednačina oduzmemo od prve tada dobivamo:

$$b^2 x_0\, x_2 - b^2 x_0\, x_1 + a^2 y_0\, y_2 - a^2 y_0\, y_1 = 0 \quad \text{ili}$$

$$b^2 x_0 (x_2 - x_1) + a^2 y_0 (y_2 - y_1) = 0 \quad \text{odakle je:}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \tag{3}$$

Jednačina prave linije koja prolazi kroz tačke: $M_1(x_1,\ y_1)$ i $M_2(x_2,\ y_2)$ data je sledećim izrazom:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \tag{4}$$

Kad u jednačini (4) mesto veličine: $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ stavimo njenu vrednost iz izraza (3) tada dobivamo jednačinu:

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_1) \quad \text{ili}$$

$$a^2 y\, y_0 - a^2 y_0\, y_1 = -b^2 x\, x_0 + b^2 x_0\, x_1 \quad \text{ili pak}$$

$$b^2 x\, x_0 + a^2 y\, y_0 = b^2 x_0\, x_1 + a^2 y_0\, y_1.$$

Ako u ovoj jednačini mesto veličine: $b^2x_0x_1 + a^2y_0y_1$ stavimo njenu vrednost iz druge od jednačina (2), tada dobivamo:

$$b^2 x\, x_0 + a^2 y\, y_0 = a^2 b^2 \tag{5}$$

Jednačina (5) pretstavlja pravu liniju koja prolazi kroz tačke dodira elipse i onih njenih tangenata koje su na nju povučene iz tačke $P(x_0,\ y_0)$. Prava linija koja je pretstavljena jednačinom (5) zove se p o l a r o m t a č k e $(x_0,\ y_0)$ s o b z i r o m n a z a d a n u e l i p s u, a tačka $P\ (x_0,\ y_0)$ naziva se p o l o m te polare.

Istim načinom bi se mogle odrediti i jednačine polara ostalih krivih linija drugoga reda.

Gligor Slepčević, Beograd

Z. Janković

O ATOMSKIM TEORIJAMA

Tokom 19. stoljeća atomska je hipoteza bila potvrđena u tolikoj mjeri da je opstojanje atoma i izgradnja materije iz atoma postalo neoboriva naučna tekovina. Rezultati istraživanja katodnih zraka, pojava radioaktivnosti, spektara itd., silili su nadalje na napuštanje predstave o nedjeljivom atomu bez unutrašnje strukture. Atomu, nepristupačnom neposrednom opažanju, fizičari pridjeljuju unutarnju strukturu. Atom postaje sjedište električnih naboja po veličini jednakih a po predznaku protivnih. Istaknimo iz toga razvoja slijedeće momente[1]).

W. Weber[2]) zamišlja već 1871., oslanjajući se na P. Ampère-ovu zamisao molekularnih struja, da je atom sastavljen od negativnog naboja kojemu pripada gotovo sva masa atoma i pozitivnog naboja malene mase, koji kruži oko njega. Nekako u isto vrijeme C. Maxwell a kasnije O. Lodge[3]) vide u atomu sistem nalik na planet Saturn. Atom H. Nagaoke[3]) sastoji se od velikog broja elektrona poredanih ekvidistantno u krugu, a u središtu kruga nalazi se pozitivni naboj velike mase. J. J. Thomson[4]) smatra da se atomi sastoje od čestica negativnog električnog naboja, koje su smještene u kugli jednoliko razdijeljenog pozitivnog naboja. Atom E. Rutherforda[5]) sadrži centralni naboj — jezgru — $\pm Ze$, malenih prostornih dimenzija, okružen kuglom naboja $\mp Ze$ konkretno: pozitivnu jezgru $+Ze$ okruženu sa Z elektrona. U tomu eksperimentalno dovoljno utvrđenom sistemu, nalik na planetni, treba za Z uzeti redni broj elementa u periodskom sistemu. Ta Van den Brockova slutnja potvrđena je rezultatima istraživanja Moseley-a[6]) i Chadwick-a[7]).

Teorija međutim nije bila u stanju objasniti sastav spektara ni u ovom ni u drugim atomskim modelima mehaničkim titrajima njihovih električki nabijenih dijelova pomoću klasične elektrodinamike.[8]) Zato N. Bohrova[9]) spoznaja potrebe ograničenja važenja zakona mehanike i elektrodinamike u atomskim sistemima predstavlja odlučan napredak. Uzevši kao osnovu Rutherfordov atom, Bohr-Sommerfeldova[10]) teorija izlučuje između svih mehanički mogućih staza elektrona, kao kvantno dopuštene ili »stacionarne« one, koje zadovoljavaju kvantnim uvjetima.

$$I_j = \oint p_j \, dq_j = n_j \, h \qquad j = 1 \ldots f, \qquad h \text{ Planck-ova konstanta}$$

gdje p_j, q_j znače generalizirane impulse i koordinate, f broj stepena slobode sistema, n_j prirodne brojeve, dok samu integraciju treba provesti po periodi pojedine varijable q_j. K. Schwarzschild i P. Epstein[11]) omogućili su izbor koordinata q_j zahtjevom, da se u njima izražena Hamiltonovih funkcija problema dade separirati. Emisija, pak, spektralnih linija ne nastaje uslijed mehaničkih frekvencija električnih naboja u stacionarnim stanjima, već uslijed »skoka« iz jednog stacionarnog stanja u neko drugo. Izborna pravila izlučuju dopuštene skokove. Frekvencija spektralne linije vezana je s nastalom promjenom energije sistema relacijom

$$h\nu = \Delta E.$$

Uzmimo primjer: jedan elektron koji se giblje u Coulombovom polju pozitivne jezgre. Uz pretpostavku konstantne mase, kvantni uvjeti

$$I_\varphi = \oint p_\varphi \, d\varphi = n_\varphi \, h \qquad I_r = \oint p_r \, dr = n_r \, h$$

izlučuju između svih mehanički mogućih komplanarnih elipsa sa fokusom u jezgri

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \qquad \varepsilon < 1$$

one, koje su kvantno dopuštene. Odavde lako nađemo

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi}=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=\frac{n_r+n_\varphi}{n_\varphi}=\frac{n}{n_\varphi}\quad \text{t. j.}\quad \frac{a}{b}=\frac{n}{n\varphi}.$$

Prema tomu, svakom kvantnom broju n odgovara n dopuštenih elipsa ($n_\varphi = 1 \ldots n$) iste velike poluosi. Elipsa $n_\varphi = n$, $n_r = o$, $a = b$ odgovara Bohrovoj kružnici.

Iz izraza za energiju

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{h^2}\cdot\frac{1}{(n_\varphi+n_r)^2}$$

vidimo da ne postoji energetska razlika između pojedinih elipsa koje pripadaju istom kvantnom broju $n = n_r + n_\varphi$; spektralne linije će biti jednostavne. Uzmemo li u obzir relativističku promjenu mase, tada su kvantno dopuštene staze dane sa

$$r=\frac{p'}{1+\varepsilon'\cos\gamma\varphi}\qquad \varepsilon'<1$$

To su rozete u polarnom sistemu (s polom u jezgri) koji miruje, a to su elipse u sistemu koji rotira u ravnini rozete kutnom brzinom

$$\frac{2\pi}{T}\left(\frac{1}{\gamma}-1\right);$$

T je vrijeme obilaska elektrona. Izraz za energiju

$$E_{n_r\, n_\varphi} = m_o c^2\left\{\left[1+\frac{\alpha^2 Z^2}{\left(n_r+\sqrt{n_\varphi^2-\alpha^2 Z^2}\,\right)^2}\right]^{-1/2}-1\right\}\qquad \alpha=\frac{2\pi e^2}{hc}$$

ukazuje na finu strukturu spektralnih linija. Time su spektri H, He^+, Li^{++} dobili teoretsko obrazloženje.[12])

Bohr-Sommerfeldova teorija pokazala se uspješnom u tumačenju mnogih pojava (optički i rentgenski spektri, periodički sistem itd.) no zatajila je u mnogim pojedinostima, a i bila nemoćna riješiti mnoge probleme (na pr. *He* spektar) — znak da je Bohrov zahvat bio nedovoljan.[12]) Problemima atomske fizike trebalo je prići drugim putovima a to su L. de Broglie[13]), E. Schrödinger[14]), W. Heisenberg[15]) i P. A. M. Dirac[16]) i učinili.

Novija, pak, istraživanja navela su fizičare, da objektivno utvrđenoj atomskoj jezgri Rutherfordovog atoma pridijele unutarnju strukturu. Njezino istraživanje čini centralnu točku moderne fizike[17]).

---

1) Povijest atomistike na pr. J. C. Maxwell: Atom u Enc. Brit., također u The Scientific Papers Paris, 1927. K. Lasswitz: Geschichte der Atomistik von Mittelalter bis Newton, I, II Hamburg 1890. S. Hondl: Nacrt povijesti kvantitativne atomistike, Rad. Jug. Akad. 204, 1914.

2) R. A. Millikan: The Electron, Chicago, 1924.

3) H. Nagaoka: Kinetic of a system of Particles illustrating the Line and the Band Spectrum and the Phenomena of Radioactivity Phil. Mag. 7, 1904.

4) J. J. Thomson: On the Structure of the Atom, Phil. Mag. 7, 1904.

5) E. Rutherford: The scattering of α and β Particles by Matter and the Structure of the Atom. Phil. Mag. 21, 1911.

6) H. G. C. Moseley: The High Frequency Spectra of the Elements, Phil. Mag. 26, 1913. Phil. Mag. 27, 1914.

7) J. Chadwick: The charge on the Atomic Nucleus and the Law of Force Phil. Mag. 40, 1920.

8) na pr. J. Nicholson: Monthly Notices 72, 1912.

9) N. Bohr: On the Constitution of Atoms and Molecules, I, II, III, Phil. Mag. 26, 1913.

10) A. Sommerfeld: Zur Quantentheorie der Spektrallinien, Ann. d. Phys. 51, 1916.

KAKO SE NEKAD BROJILO

Do pojma prirodnog broja došlo se iskustvom i apstrakcijom.

Tek onda, kad je spoznao da skupine od dva goveda, dva štapića, dvije želje, dva udarca, itd. imaju nešto zajedničko, kad je od svih tih skupina apstrahirao »dva« — a isto tako i za veće količine stvari — stekao je čovjek prvi pojam prirodnog b r o j a. Dok ga još nije posjedovao, on bi — kako Zeuthen iznosi u jednom zgodnom primjeru — ako je htio za svako svoje dijete ubrati jabuku postupao ovako: Ubrao bi jednu za Ivicu, jednu za Mariju itd., a kad bi ih dijelio, morao bi paziti, da svako dijete dobije upravo za njega ubranu jabuku. Ali kad je uvidio da je to nepotrebno i da će bez obzira na to, tko dobije »Ivičinu«, a tko »Marijinu« jabuku ipak svako dijete dobiti jednu — onda je prvi pojam broja bio već stvoren: o n o z n a č u j e k o l i č i n u p r e d m e t a k o j a j e n e z a v i s n a o n j i h o v o m p o r e đ a j u i m e đ u s o b n i m r a z l i k a m a. Ako on ima četvero djece, onda nijedno ne će ostati bez jabuke, ako je ubrao četiri jabuke.

Kad je primitivac izašao sa svojim stadom, a nije još imao pojam »broja«, on je, ako bi manjkalo koje govedo, primijetio da nema t i h i t i h goveda, ali ne da mu fali 2, 3 ili 4 govečeta. No kad je stado postajalo veće, bivalo je to sve teže i teže: da se utvrdi ne manjka li koji komad, trebalo je sada p r e b r o j i t i stado. Kad je trgovac mijenjao robu za robu, morao je znati koliko će komada nekog artikla dobiti za nju; znači: bijaše potrebno da broji. Kad je stekao izvjesnu imovinu, bilo je potrebno da zna koliko ima pojedinih stvari ili životinja — čovjek je bio p r i n u đ e n da broji.

Isprva se brojilo konkretnim predmetima: kamenčićima, vlatima trave, štapićima, i drugim. No, kao najprikladnije sretstvo za taj posao pokazali su se prsti: oni su svakom čovjeku u svakoj prilici i na svakom mjestu doslovce bili »pri ruci«. Nije trebalo voditi brige o tome da se »ponesu sa sobom« ako ih tamo, gdje će se brojiti, ne bude bilo; nisu se mogli zametnuti ili izgubiti kao kamenčići ili štapići — a osim toga, oni su svojim različitim oblikom omogućavali lako pamćenje nekog broja.

Prva poteškoća nastala je kod brojeva većih od 5 — ali ona je bila lako prebrođena tako, da se brojenje na prstima jedne ruke nastavilo na prstima druge. Tako se sada moglo brojiti do deset. Ali to nije bilo dovoljno. Što sada? Upravo ovdje, kod brojeva većih od deset, čovjek je došao na jednu zapravo genijalnu zamisao: nakon što je kod brojenja upotrijebio sve prste obiju ruka, nastavio je brojenjem tako, da je opet počeo od prvog prsta. (Kod nekih plemena bilo je to odloženo na brojeve veće od 20 time, što su prebrojivši sve prste na rukama nastavili brojiti prstima na nozi.)

---

11) P. S. Epstein: Zur Theorie des Starkeffektes, Ann. d. Phys. 50, 1916.

12) isp. A. Sommerfeld: Atombau und Spektrallinien, Braunshweig I, 1931, II, 1939 Cl. Schaefer: Einführung in die theoretische Physik, Leipzig 1937.

13) L. de Broglie: Ondes et quanta C. R. 177, 1923. isp. L. de Broglie: Introduction a l'etude de la mécanique ondulatoire Paris, 1930.

14) E. Schrödinger: Quantisierung als Eigenwertproblem, Ann. d. Phys. 79, 1926. isp. E. Schrödinger: Abhandlungen zur Wellenmechanik, Leipzig 1927.

15) W. Heisenberg: Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen Z. f. Ph. 33, 1925. M. Born-P. Jordan: Zur Quantenmechanik Z. f. Ph. 34, 1925. M. Born-W. Heisenberg-P. Jordan: Zur Quantenmechanik Z. f. Ph. 35, 1925. isp. W. Heisenberg: Die physikalischen Prinzipien d. Quantentheorie Leipzig, 1930. M. Born-P. Jordan: Elementare Quantenmechanik, Berlin 1930.

16) P. A. M. Dirac: The Quantum theory of the Electron I, II Proc. Roy. Soc. 117, 118, 1928. isp P. A. M. Dirac: Die Prinzipien der Quantenmechanik, Leipzig 1930.

17) isp. C. F. Weizsäcker: Die Atomkerne, Leipzig 1937. J. Mattauch-Flügge: Kernphysikalische Tabellen, Berlin 1942.

No sada je trebalo znati ne samo broj nabrojenih prstiju već i broj, koji će pokazati koliko su puta prije toga bili izbrojeni svi prsti. Jedno afričko pleme još i danas kod prebrajanja goveda svog stada postupa na ovaj način: Od tri čovjeka, koji će prebrojavati stado prvi za svako govedo koje prođe previne jedan prst. Drugi previne po jedan prst svaki put, kad je prvi imao svih deset previnutih i tako nabraja desetice. Slično i treći nabraja stotice. (usporedi i sliku 1.)

Vjerojatno je da je upravo zbog ovog načina brojenja na prste i došlo do toga, da danas većina naroda upotrebljava dekadski brojni sustav. Isto je tako brojenje na prste razlog da neka plemena imaju brojne sustave s bazom 5 i 20.

Mi bismo mogli računati u kojem god sustavu. Poteškoće bi nastale kod sustava sa premalom bazom — na pr. 2, 3 ili 4 — budući da bi pisanje većih brojeva i računanje s njima na način kako to radimo u dekadskom sistemu bilo nezgodno, jer bi imali mnogo znamenaka. Sistemi s velikom bazom bili bi pak neugodni stoga, što bi za njih trebalo mnogo cifara, i jer bi »jedamputjedan« bio veći i teži.

No sustav s bazom 12, duodecimalni sustav, imao bi dosta prednosti pred dekadskim: 12 je bez ostatka djeljivo sa 2, 3, 4 i 6 a odnosi između godine, mjeseca, dana, sata, minute i sekunde; lučnog stupnja, minute i sekunde te tuceta i grosa računaju se i onako duodecimalno odnosno seksagesimalno.

Sl. 1. Asirci broje odrubljene glave

Međutim, prelaz na duodecimalni sustav iziskivao bi goleme promjene: morali bismo se priviknuti na novi »jedamputjedan« (tablica množenja) s brojevima pisanim novim ciframa u novom sistemu, mnoge udžbenike matematike i njoj srodnih nauka trebalo bi »prevesti« na novi sistem, sve tabele trebalo bi izdati nanovo, bezbroj podataka svakakovih istraživanja trebalo bi preračunati u novi sistem itd.

No samo brojenje nije još bilo dovoljno. Neke je brojeve trebalo upamtiti ili ih saopćiti drugima. Da se to omogući, bile su potrebne riječi i znakovi za pojedine brojeve.

Riječi, koje je čovjek uzimao da mu označuju brojeve bile su isprva nazivi konkretnih predmeta iz njegove najbliže okoline koji su svakome bili poznati i po kojima se na neki način odmah moglo sjetiti dotičnog broja. Najčešće su uzeti nazivi prstiju, ruku, nožnih prstiju i nogu: još jedan dokaz da je najranije brojenje i računanje bilo brojenje i računanje na prste. Ta je veza tim očitija, što je jezik nekog naroda neizbrušeniji. U jezicima Američkih Indijanaca, kod Malajaca i kod Čukča u Sibiriji imaju riječi »pet« i »ruka« isti korijen. Kumani iz istočnog Sudana vele za 6 doslovce »ruka i jedan«, a Bandi za petnaest »tri šake«. Eskimima Hudsonbeia je 20 »jedan čovjek« itd.

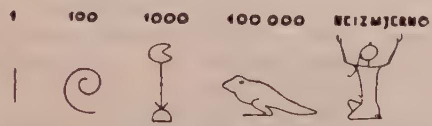
Veće brojeve obično se izražavalo s manjim vršeći s njima operacije zbrajanja, množenja, oduzimanja i dijeljenja. »Sedamnaest« nije drugo nego »sedam na deset«, »dvadeset« je »dva (puta) deset«. Latinski »duodeviginti« = 18 znači »dva do dvadeset«; francusko quatre-vingt = 80 je 4 (puta) dvadeset itd.

Uporedo s nazivima za brojeve stvoreni su i znakovi koji će ih predočavati. I ovdje se često slika konkretnog predmeta upotrebljavala kao znak koji će čovjeka potsjetiti na izvjestan broj.

Rimske brojke I, II, III zaista zorno predočuju brojeve 1, 2 i 3. Za rimsku brojku X drži se da pretstavlja unakrštene ruke (deset prstiju), a za V da je polovina (gornja) od X, dakle 5. Drugi su opet mišljenja da je V krajnje stilizirani prikaz dlana s ispruženih 5 prstiju.

Za arapske cifre 1, 2 i 3 vjeruje se da su nastale iz znakova —, = i ≡.

U egipatskom hijeroglifskom pismu znači | jedan, smotano uže 100, lotosov cvijet 1000, gušterica 100 000. Čovjek u sjedećem položaju s uzdignutom glavom i rukama ispruženim prema nebu pretstavlja račundžiju koji je pred velikim rezultatom zapao u uzbuđenje i služi kao znak za neizrecivo veliki broj. (slika 2.)

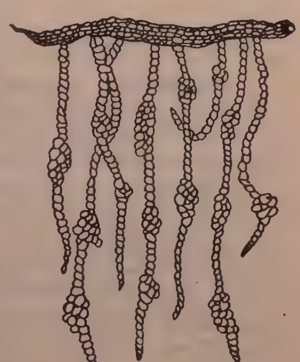


Sl. 2. Egipatski hijeroglifski znakovi za brojeve

Kečua, glavno pleme izumrlih peruanskih Inka napisali su svoju povijest od 949. do 1533. god. kad su Španjolci provalili u njihovu zemlju, pomoću različito vezanih čvorova na užetu ispletenom od vlati trave. Na tom užetu — nazvanom quipu — označivali su i brojeve i to — kako drži Tschudi — tako, da jednostavan čvor označuje 10, dvostruki 100, itd. (slika 3.)

Azteki su 20 označivali zastavom u obliku paralelograma (misli se da su pod takvom zastavom išli odredi od 20 njihovih boraca), 400 perom a 8000 tobolcem kakao-sjemenaka.

Kad je brojenje i pisanje brojeva bilo savladano, počelo se brojevima i računati: Najprije se računalo onim istim, čime se i brojilo: kamenčićima, štapićima, a najviše prstima. Kod množenja na prste brojeva većih od 5 neka plemena još i danas postupaju ovako: Treba na primjer izračunati koliko je 6 puta osam. Na jednoj ruci uvinu jedan prst, jer je 5 i jedan jednako 6, a na drugoj tri, jer je pet i tri jednako 8. Zbroj uvinutih prstiju obiju ruku daje desetice produkta, dakle 1 plus 3 = 4, a umnožak neuvinutih prstiju jedne ruke s neuvinutim prstima druge daje jedinice produkta, dakle 4 puta 2 = 8. Ovakvim multipliciranjem svode se produkti brojeva između 5 i 10 na produkte brojeva manjih od 5, koje svakako treba znati napamet.



Sl. 3. Quipu

Dalje se računanje razvijalo na posebnoj računskoj ploči ili »abakusu«, koji je usporednim crtama bio podijeljen na stupce, u kojima su se pomicali kamenčići ili žetoni. Najpoznatiji od tih abakusa je jedna grčka računska ploča nađena na otoku Salamini. Široka je metar i po, a duga tričetvrt metra. Bilo je i takvih abakusa koje se posipavalo s pijeskom, pa se onda prstima po njima pisalo i računalo.

Ukoliko su njihovi vlastiti podaci točni, posjedovali su Kinezi već 2600 pr. naše ere spravu za računanje »Svanpam«. U principu je Svanpam jednak abakusu, samo se umjesto kamenčićima računa kuglicama nanizanim na napete žice kao kod sprave koja se danas upotrebljava u osnovnim školama.

E. V.

Martin Davidson

SVEMIR SE ŠIRI ...

Pomoću reflektora na Mt Wilsonu od 2,5 metra otvora može se prodrijeti na daljinu od oko 500 miliona godina svjetlosti i premda istraživanje tog silnog prostranstva daje uzorke tek ovdje ondje, ipak su oni od velike važnosti u određivanju raspodjele galaksija. Premda su nepravilnosti u njihovoj raspodjeli, u mnogim dijelovima svemira očevidne, ipak se uzevši u cjelini može smatrati da je prosječna gustoća galaksija u prostoru jednolika. Spektroskopska ispitivanja galaksija do daljine od 250 miliona godina svjetlosti pokazuju da se one, praktički, sve odmiču od nas. To je objašnjenje opaženih pomaka spektralnih crta prema crvenom; iznos tog Dopplerovog pomaka razmjeran je daljini galaksije. Galaksije daleko oko milion godina svjetlosti, kao Velika Maglica u Andromedi, odmiču se brzinom od 140 km u sekundi, a one na daljini od deset miliona godina svjetlosti odmiču se brzinom od 1400 km u sekundi i t. d.

Ako se nastavi tim odnosom odmicanja i kad bi se opažale galaksije daleke čak 2 milijarde godina svjetlosti, onda bi se pričinjalo da se one odmiču brzinom većom nego što je brzina svjetlosti. No, prema nazorima moderne fizike ništa se ne može kretati brže od svjetlosti; tu bi se dakle susreli s teškoćama — ako se odnos odmicanja nastavlja na isti način. Kad se postavi teleskop od 5 metara, on će moći otkriti galaksije daleke 1 milijardu godina svjetlosti i, ako se upravo spomenuta relacija održi, razumljivo je da pretstoji neko drugo tumačenje Dopplerova pomaka. Ako se u drugu ruku, ne održi relacija, može se smatrati da se svemir još uvijek rasteže. Treba spomenuti da se galaksije ne odmiču samo od nas nego se one odmiču i jedna od druge, kao da su jednom bile posve blizu jedna od druge i onda raspršene nekom eksplozijom ili nekako drukčije, a njihovo se gibanje nastavlja i po isteku mnogih stotina milijuna godina.

Iz knjige *The stars and the mind, Watt & Co, London, 1947.*

ZADACI

Rješavajte zadatke i šaljite nam rješenja na adresu: Redakcija Glasnika, Marulićev trg 19, Zagreb.

Nije dovoljno da pošaljete samo rezultat u pojedinom zadatku; još nam je važniji opis postupka kojim ste zadatak riješili.

Šaljite nam razne zadatke s pripadnim rješenjem!

Pažnja! Ne rješavajte više zadataka na jednom te istom komadu papira. Pišite samo na jednoj strani papira. Ako se u rješenjima služite i slikama, nacrtajte sličicu na posebnom komadu tvrđeg papira, i to po mogućnosti tušem!

Molimo nastavnike u pojedinim školama da oglasom saopće đacima barem one zadatke iz Glasnika što su označeni zvjezdicom.

*Hitno šaljite rješenja zadataka označenih zvjezdicom *, jer ćemo rješenja takovih zadataka objaviti već u slijedećem broju Glasnika.*

49. Ovaj zadatak treba da glasi ovako:

Neka su a, b dvije poluosi jedne elipse, a a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 poluosi njezine projekcije na tri međusobno okomite ravnine. Neka se dokažu relacije:

$$2(a^2 + b^2) = a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2$$
$$(a\,b)^2 = (a_1\,b_1)^2 + (a_2\,b_2)^2 + (a_3\,b_3)^2.$$

56.* Za svaki trokut ABC važi

$$ctg\,\alpha + ctg\,\beta + ctg\,\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\,P}.$$

57.* U koordinatnom sistemu u ravnini zadan je proizvoljan pravac p; ako je (ξ, η) proizvoljna tačka pravca p, a a i b dva proizvoljna broja, dokaži da spojnice tačaka (a, ξ), (b, η) prolaze jednom te istom tačkom zavisnom jedino o pravcu p, a ne o pojedinoj njegovoj tački (ξ, η).

58.* U dekadskom brojnom sistemu brojevi n i n^9 imaju istu cifru jedinica.

59. U ravnini su zadana dva brojna pravca p i q i jedna tačka T. Položimo li proizvoljan pravac s kroz T, sjeći će on p i q u tačkama koje na brojnim pravcima p i q imaju apscise x i y. Shvatimo li x i y kao Descartes-ove ortogonalne koordinate tačke, pita se što opisuje ta tačka (x, y) kod sekanta s prolazi pramen pravaca tačkom T. Diskusija (isp. rad. 57.*).

60. Poznata zadaća iz analitičke geometrije u ravnini: naći geometrijsko mjesto točaka, iz kojih se dadu povući dvije među sobom okomite tangente na zadanu krivulju drugog reda, vodi u prostoru do ovih zadataka:

a) Nađi geometrijsko mjesto vrhova trostranih pravokutnih uglova, koji svojim stranama dotiču površinu

$$A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 = D.$$

b) Ista zadaća za površinu

$$2\,z = A\,x^2 + B\,y^2.$$

c) Nađi geometrijsko mjesto vrhova trostranih pravokutnih uglova, koji svojim bridovima dodiruju površinu

$$A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 = D$$

d) Ista zadaća za površinu

$$2\,z = A\,x^2 + B\,y^2$$

e) Nađi geometrijsko mjesto vrhova trostranih pravokutnih uglova, koji svojim stranama diraju krivulju

$$A\,x^2 + B\,y^2 = C \qquad z = O$$

f) Nađi geometrijsko mjesto vrhova trostranih pravokutnih uglova, kojih bridovi prolaze krivuljom

$$A\,x^2 + B\,y^2 = C \qquad z = O$$

61. Kojega je dana u godini na mjestu s geografskom širinom φ najkraći sumrak? Obradi slučaj Zagreba

$(\varphi = 45^0 49{,}5')$[1].

62. Funkcija $f(x)$ neka je takova, da se u segmentu $[a, b]$ može razviti u Taylorov red.

Neka se dokaže: ako su od nekog $i = p$ pa dalje derivacije $f^{(i)}(a)$ omeđene, $|f^{(i)}(a)| < C$ te ako je u zadanom intervalu $|f^{(i)}| > c$ gdje su C i c čvrsti konačni brojevi $\neq 0$ nezavisni o i onda je u Lagrangeovom ostatku $\left(R_k = \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a + \vartheta_k k)\right)$

$$\lim_{k \to \infty} \vartheta_k = 0.$$

63. $$x = \varphi(x) + \int_0^x (x - t)\,\varphi(t)\,dt, \quad \varphi(x) = ?$$

---

* Zvjezdicom označene zadatke mogu riješiti i učenici srednjih škola.

1 Za početak sumraka uveče uzima se zalazak Sunca, a za svršetak t. zv. g r a đ a n s k o g sumraka čas kad se Sunce nalazi 6^0 ispod horizonta.

64. Odredi $\lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{\dfrac{n\pi}{4} - \sum\limits_{k=1}^{n} \arc\sin \sqrt{\dfrac{1-k\delta}{2}}}{\sum\limits_{k=1}^{n} e^{\sin k\delta} - n}$

65. Neka se po Austinovoj formuli izračuna efektivna jakost električnog polja E zagrebačke radiostanice za daljinu $r = 1000$ km.

Uputa. U Austinovoj poluempiričkoj formuli

$$E = 120\,\pi\, \frac{h\,I}{\lambda r} \sqrt{\frac{\alpha}{\sin \alpha}}\, e^{-0{,}0015 \cdot \frac{r}{\lambda^{0,6}}}$$

znači: h efektivnu visinu antene, I efektivnu struju u anteni, e bazu prirodnih logaritama, λ valnu dužinu, α kut, pod kojim bi se iz središta Zemlje vidjela daljina r.

Veličine r, λ, h su izražene u kilometrima, struja I u amperima, jakost polja E u milivoltima na metar $\left(\frac{mV}{m}\right)$.

Podaci za zagrebački odašiljač: $h \backsim 50$ m (0,05 km), $\lambda = 447$ m (0,477 km), $I = 25$ amp., $\alpha \doteq \sin \alpha$.

66. Uz pretpostavku da i za manje daljine r vrijedi Austinova formula, neka se izračuna, u kojoj bi se još daljini zagrebačka radiostanica mogla slušati detektorskim aparatom, ako je za takvo slušanje potrebna najmanja jakost električnog polja $\dot{E} = 3\,\frac{mV}{m}$.

67.* U horizontalno namještenoj polukugli s polumjerom r, koja rotira oko svojeg vertikalnog polumjera, nalazi se kuglica s masom m. Neka se izračuna visina h, do koje će se djelovanjem centrifugalne sile kuglica dići, ako je zadano trajanje t jednog okreta polukugle. Koja relacija mora postojati među veličinama t i r, da se kuglica počne dizati?[1])

68. Neka se dokaže, da je uz polaganu vrtnju kuglaste ili cilindrične posude, površina tekućine, koja se u njoj nalazi, rotacioni paraboloid.[2]).

RJEŠENJA

Objavljujemo rješenje zadataka 12, 29, 32, 34, 42, 43, 46*, 47*, 48*.

Pažnja! Ne rješavajte više zadataka na jednom te istom komadu papira. Pišite samo na jednoj strani papira. Ako u rješenju dolaze i slike, nacrtajte ih na zasebnom komadu tvrđeg papira, i to, po mogućnosti, tušem.

12. Treba konstruirati jednu ravninu, koja siječe zadani rotacioni stožac u elipsi zadanih osi. (Zadao V. Niče; riješili: Fr. Neděla, D. Blanuša; N. Išpirović, Palman Dominik i St. Bilinski svi iz Zagreba).

Sve ravnine s istim nagibom spram osi stošca, manjim od nagiba izvodnica, sijeku stožac u elipsama s istim omjerom osi. Dovoljno je naći neku ravninu s ispravnim nagibom, jer se onda paralelnim pomakom lako dobije položaj, gdje poluosi presječne elipse imaju traženu veličinu a i b.

Treba da odredimo vezu između nagiba φ osi stošca i ravnine u kojoj leži zadana elipsa.

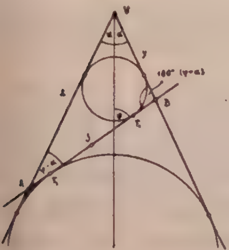
---

1) U zadatku treba uzeti, da je konkavna strana polukugle okrenuta prema gore.

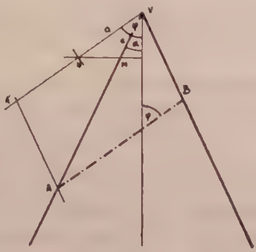
2) Kao u prijašnjem zadatku tako uzimamo i ovdje, da je os rotacije vertikalna i da se podudara s promjerom kugle, odnosno s osi cilindra.

Za ravninu crtnje odabiremo osni presjek stošca, koji je okomit na ravnini elipse.

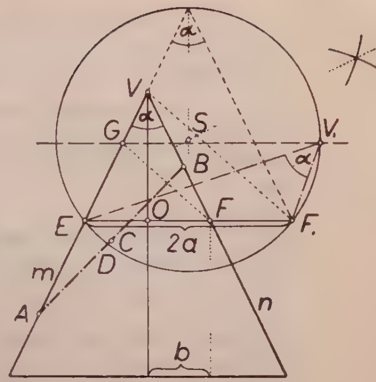
U dijelove stošca, nastale presjekom, upišimo t. zv. Dandelinove kugle. One diraju ravninu elipse u žarištima elipse (sl. 1).



Sl. 1



Sl. 2



Sl. 3

Prema relacijama za trokutu upisanu kružnicu iznutra i izvana, dobivamo stavljajući $AV = x$, $BV = y$;

$$\overline{AF_1} = a + e = s - y = \frac{2a + x + y}{2} - y = a + \frac{x - y}{2}$$

a odatle

(1) $$x - y = 2e.$$

Iz Δ VAB slijedi po poučku o sinusima:

$$x = \frac{2a}{\sin 2\alpha} \sin(\alpha + \varphi)$$

$$y = \frac{2a}{\sin 2\alpha} \sin(\varphi - \alpha)$$

zbog čega relacija (1) postaje

$$\sin(\varphi + \alpha) - \sin(\varphi - \alpha) = \frac{e}{a} \sin 2\alpha$$

$$2 \cos\varphi \sin\alpha = 2 \cdot \frac{e}{a} \sin\alpha \cos\alpha$$

(2) $$\cos\varphi = \frac{e}{a} \cos\alpha$$

Kut nagiba φ tražene ravnine prema osi stošca konstruiramo u skladu s gornjim izrazom na slijedeći način:

Na izvodnicu odmjerimo $VM = e$ (ili višekratnik ove dužine, ako je e malen). Kroz M provučemo okomicu na os stošca, a tu okomicu presječemo sa $VN = a$ (ili isti višekratnik kao gore).

Kut između NV i osi stošca je traženi kut nagiba ravnine prema osi.

Paralelnim pomakom dužine $2a = VA'$ odmjerene na pravcu VN dobivamo položaj velike osi $AB = 2a$ naše elipse (sl. 2).

Po prirodi zadatka mora biti α šiljast kut,

$$\alpha < \varphi < \pi - \alpha$$

$$\cos\alpha > \cos\varphi > -\cos\alpha$$

$$\cos\alpha > \frac{e}{a}\cos\alpha > -\cos\alpha$$

$$1 > \frac{e}{a} > -1$$

Kako se radi o elipsi, bit će $e < a$, te je konstrukcija uvijek moguća.

Za $\varphi = \frac{\pi}{2}$ imamo $\frac{e}{a} \cos \alpha = 0$; t. j. $e = 0$ (zašto nije $\alpha = 90^0$?) pa je zadana elipsa zapravo kružnica.

Gornje rješenje poslao je Fr. Neděla. N. Išpirović zadatak rješava također trigonometrijski, bez Dandelinovih kugala. St. Bilinski rješava zadatak 12. ovako:

Zamislimo da je konstrukcija već izvedena, pa neka je $\Delta\, ABV$ (sl. 1.) presjek stošca okomit na ravninu elipse. Neka je S središte kružnice k upisane u $\Delta\, ABV$, to je ono ujedno i središte manje Dandelinove kugle. Ako je otvor stošca $\measuredangle\, AVB = 2\,\alpha$, to se može lako vidjeti da je $\measuredangle\, ASB = 90^0 + \alpha$. Odatle slijedi ova konstrukcija trokuta $\Delta\, ABV$:

Budući da su zadane osi elipse, to možemo na velikoj osi $\overline{AB}$ konstruirati fokuse, pa ćemo fokusom F_1 povući okomicu n na $\overline{AB}$. Jasno je, da će središte S Dandelinove kugle ležati na toj okomici. Poznatom konstrukcijom možemo zatim nacrtati bilo koji trokut ABC, koji ima na vrhu C kut $\measuredangle\, ACB = 90^0 + \alpha$. Opišemo li sada trokutu ABC kružnicu k^1, to će točka S biti jedino od sjecišta okomice n i kružnice k_1 (jednakost periferijskih kutova!). Prema tome možemo nacrtati i kružnicu k, a onda je vrh V sjecište tangenata povučenih iz točaka A i B na kružnicu k. Prenesemo li sada dužine VA i VB na stranice osnog presjeka danog stošca, to je time ravnina presjeka posve određena.

D. Blanuša rješava zadatak tako da prostor razvuče u omjeru $a : b$, u smjeru okomitom na odabranoj osnoj ravnini stošca. Time će baza stošca — kružnica — preći u elipsu dakle uspravni kružni stožac prelazi u uspravni eliptički stožac, ali će zato tražena elipsa prijeći u kružnicu, tako da se zadatak 12 svodi na ovaj:

Zadatak 12bis. *Zadani eliptički stožac presjeci ravninom tako da presjek bude kružnica* zadana radiusa.

Prirodnije je da zadatak 12bis svodimo na zadatak 12 — a ne obrnuto —, ali je od interesa da vidimo kako se zadatak 12bis može riješiti direktno. Citiramo D. Blanušu:

Neka su A, B tjemena na velikoj osi eliptične baze čunja, C, D tjemena na maloj osi, a S neka je vrh čunja. Postavimo kuglu tako, da joj je središte na osi čunja, i da dira izvodnice SA i SB u točkama G i H. Očito kugla i čunj u tim točkama imaju zajedničke tangentne ravnine, a presječnica čunja i kugle ima na tim mjestima dvostruke točke. Ta presječnica kao presjek dviju ploha 2. reda mora biti krivulja 4. reda, pa stoga s bilo kojom ravninom ne može imati više od 4 zajedničke točke, osim ako cio dio krivulje padne u tu ravninu. Ravnina kroz dvostruke točke (koje broje kao 4 obične točke) i jednu petu točku mora dakle sadržavati jedan dio krivulje, t. j. prostorna krivulja 4. reda raspada se u ravninske krivulje. Budući da su ravni presjeci kugle kružnice, krivulja se mora raspasti u dvije kružnice, koje je lako naći, jer su određene probodištima izvodnica SC i SD s kuglom. Time je zadatak riješen.

Rješenje Palmana Dominika (sl. 3):

P o m o ć u d e s k r i p t i v n e g e o m e t r i j e. Neka je pravcima m, n na slici 3 predočena nacrtna projekcija uspravnog kružnog stošca. Zamislimo sada dva presjeka tog stošca paralelna s nacrtnom ravninom, a udaljena od osi prema napred i natrag za dužinu male poluosi zadane elipse. Ti presjeci bit će hiperbole kojima se nacrti poklapaju, a tjeme te nacrtne hiperbole bit će u točki O, dok su joj konturne izvodnice m i n asimptote. Nacrtna projekcija velike osi traženog presjeka bit će tangenta te hiperbole, a diralište bit će projekcija male osi. Da konstruiramo tangentu određene duljine odreska između asimptota, povucimo u bilo kojoj točki (na pr. u O) tangentu. Time dobijemo trokut EF_1V čija po-

vršina ostaje konstantna — uzevši koju god tangentu. Sada treba pretvoriti trokut EF_1V u trokut iste površine, a poznate baze jednake velikoj osi $2a$ zadane elipse, ali nepoznate visine. Pomoću poznate konstrukcije dobivamo takav trokut $EF\ G$. Odredivši ovo konstruiramo trokut EF_1V_1 baze $2a$, iste visine kao i trokut $EF\ G$, ali kod kojega je $\sphericalangle EV_1F_1 = \alpha$. Ako sada duljine V_1F_1, i V_1E nanesemo od vrha V na konturne izvodnice m, n dobivamo duljinu AB, što predstavlja nacrtnu projekciju presjeka u elipsi zadanih poluosi.

D o d a t a k. Iz gornjeg razabiremo, da je za bilo koji zadani stožac i bilo koju zadanu elipsu rješenje zadatka 12. moguće. Postavimo li slični zadatak za parabolu, to uz pomoć Dandelinove kugle jednom konstrukcijom, koja je jednostavnija nego u slučaju elipse, možemo pokazati da isti zaključak vrijedi i za parabolu. No za hiperbolu to više ne vrijedi. Možemo naime odmah razabrati da će slični zadatak za hiperbolu imati rješenje samo u slučaju, ako otvor stošca nije manji od kuta među asimptotama hiperbole. Taj je uvjet očito nuždan. Presiječemo li naime stožac sa dvije paralelne ravnine ε_1 i ε_2 gdje je slika presjeka u ravnini ε_1 neka hiperbola h, a ravnina ε_2 prolazi vrhom V stošca, to su izvodnice stošca u ravnini ε_2 asimptote hiperbole h, pa je odatle evidentna nužnost gornjeg uvjeta. No da je taj uvjet za mogućnost rješenja zadatka i dovoljan, možemo razabrati na pr. tako da provedemo analognu konstrukciju kao u drugom od gornjih rješenja zadatka 12. U ovom će slučaju biti $\sphericalangle ASB = 90^0 - \alpha$, a kako fokusi leže sada izvan dužine $\overline{AB}$, to će normala n sjeći kružnicu k_1 (a prema tome i konstrukcija biti izvediva) samo onda, kada za polumjer r kružnice k_1 vrijedi relacija $r \geqq e$. Lako je razabrati da je ta relacija ekvivalentna sa relacijom $\alpha \geqq \alpha_1$, gdje je $2\alpha_1$ kut među asimptotama, a odatle slijedi da je gornja tvrdnja doista ispravna.

Tu je eto sadržana jedna bitna razlika između elipse i parabole s jedne strane i hiperbole s druge strane. Dana elipsa i parabola mogu biti presjeci bilo kojeg stošca, ali hiperbola ne!

29. $$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1+\varepsilon \cos = \varphi} = ? \text{ ako je } 0 < \varepsilon < 1.$$

Zadao Zl. Janković; ispravno riješili: N. Išpirović, Zagreb; Stj. Malčić, Petrovaradin; J. Moser, Osijek; Fr. Nedělá, Zagreb i M. Vučkić, Zagreb.

I. U o b i č a j e n a s u p s t i t u c i j a.

Ako se kod traženja primitivne funkcije izraza $\dfrac{1}{1+\varepsilon \cos \varphi}$ i upotrebljava uobičajena supstitucija $tg \dfrac{\varphi}{2} = t$, ipak se, bez daljega, ne smije ta supstitucija upotrebiti za izračunavanje samog određenog integrala I. Kako se naime φ mijenja od 0 do 2π, dakle $\dfrac{\varphi}{2}$ od 0 do π, treba imati na umu da u čitavom segmentu $0 \leq \dfrac{\varphi}{2} \leq \pi$ nemamo posla s jednom jedinom granom funkcije arkus tangens nego inverzija provedene transformacije $t = tg \dfrac{\varphi}{2}$ daje jednu granu $Arc\, tg$ u segmentu od 0 do $\dfrac{\pi}{2}$ a drugu granu u području od $\dfrac{\pi}{2}$ do π.

Da se te komplikacije izbjegnu, dobro je primijetiti da je

$$I = \int_0^{\pi} + \int_0^{2\pi}$$

i dalje raditi kao obično.

M. Vučkić i J. Moser primjećuju da je

$$I = 2 \int_0^{\pi} \quad \text{jer je} \quad \cos(\pi - \varphi) = \cos(\pi + \varphi)$$

pa dalje stvar teče normalno.

M. Vučkić se služi i supstitucijom $t = ctg \frac{\varphi}{2}$ pa odmah dolazi do rješenja, izbjegavši na taj način napred navedene poteškoće supstitucije $t = tg \frac{\varphi}{2}$ u segmentu od 0 do 2π.

II. Pomoću redova (Malčić, Moser):

Podintegralna funkcija je suma geometrijskog reda, kojemu je

$$q = -\varepsilon \cos \varphi$$

Budući da je

$$|q| = |\varepsilon \cos \varphi| \leq \varepsilon < 1$$

taj red jednoliko konvergira u segmentu

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$

Zato se red smije integrirati član po član pa imamo

$$I = I_0 - I_1 \varepsilon + I_2 \varepsilon^2 \mp \ldots + (-1)^n I_n \varepsilon^n + \ldots$$

gdje je označeno

$$I_n = \int_0^{2\pi} \cos^n \varphi \, d\varphi .$$

Parcijalnom integracijom neposredno se uvjeravamo da je

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

a budući da je

$$I_0 = 2\pi, \quad I_1 = 0,$$

bit će

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{2n(2n-2)\ldots 2} \cdot 2\pi, \quad I_{2n+1} = 0.$$

Supstitucija I_{2n} u razvoj integrala I daje

$$I = 2\pi \left[1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2}\varepsilon^4 + \ldots + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{2n(2n-2)\ldots 2}\varepsilon^{2n} + \ldots\right]$$

$$= 2\pi \left[1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1}(-\varepsilon^2) + \binom{-\frac{1}{2}}{2}(-\varepsilon^2)^2 + \ldots + \binom{-\frac{1}{2}}{n}(-\varepsilon^2)^n + \ldots\right]$$

Desna strana posljednjeg izraza pretstavlja binomijalni razvoj $(1-\varepsilon^2)^{-1/2}$ pa prema tome imademo kao konačni rezultat

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

III. Stj. Malčić rješava zadatak i pomoću Cauchyjevih residua, prelazeći dakle u kompleksno područje.

IV. Prikažimo vrlo interesantnu metodu Fr. Neděle:

$$\ldots \frac{d\varphi}{\ldots\varepsilon\cos\varphi} = \frac{\text{(stavljajući}}{\varepsilon = \cos\alpha)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1+\cos\alpha\cos\varphi} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}+\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\cos\varphi} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\sin\alpha\, d\varphi}{\cos^2\frac{\alpha}{2}(1+\cos\varphi)+\sin^2\frac{\alpha}{2}(1-\cos\varphi)} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\, d\varphi}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}+2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{\sin\alpha}\int_0^{2\pi} \frac{tg\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}\, tg^2\frac{\varphi}{2}} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\left(tg\frac{\alpha}{2}\, tg\frac{\varphi}{2}\right)}{1+\left(tg\frac{\alpha}{2}\, tg\frac{\varphi}{2}\right)^2}.$$ Rastavljajući $\int_0^{2\pi}$ na $\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}$ i imajući u vidu da je pod znakom integrala diferencijal funkcije $arc\,tg\left(tg\frac{\alpha}{2}\, tg\frac{\varphi}{2}\right)$, imat ćemo dalje da je $I=$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left[arc\,tg\left(tg\frac{\alpha}{2}\, tg\frac{\varphi}{2}\right)\right]_0^{\pi-\delta} + \left[arc\,tg\left(tg\frac{\alpha}{2}\, tg\frac{\varphi}{2}\right)\right]_{\pi+\delta}^{2\pi} =$$

$$= \left[\frac{\pi}{2}-0+0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{2\pi}{\sin\alpha} = (\text{radi } \cos\alpha=\varepsilon)\ \underline{\underline{\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}}}.$$

32. (Zadao D. Pejnović, Zagreb; riješili J. Moser, Osijek i J. Golubić, Hvar).

a) Sunce emitira svake sekunde energiju

$$\Delta E = 4\pi\cdot 15^2\cdot 10^{24}\cdot\frac{2}{60}\cdot 4{,}2\cdot 10^7 = 396\cdot 10^{31} \text{ erga.}$$

Za defekt mase Sunca u 1 sek. izlazi vrijednost

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{396\cdot 10^{31}}{9\cdot 10^{20}} = 4{,}4\cdot 10^{12} \text{ grama.}$$

Kako je

$$1 \text{ godina} = 365\cdot 24\cdot 60\cdot 60 = 3{,}15\cdot 10^7 \text{ sek.,}$$

godišnji defekt Sunčeve mase iznosi

$$4{,}4\cdot 10^{12}\cdot 3{,}15\cdot 10^7 = 138\cdot 10^{18} \text{ grama.}$$

Uz pretpostavku, da žarenje Sunca a prema tome i defekt mase ostaju stalni iako se masa Sunca neprestano umanjuje, izlazilo bi, da bi cijele mase Sunca nestalo u vremenu

$$t = \frac{2 \cdot 10^{33}}{138 \cdot 10^{18}} = 14{,}5 \cdot 10^{12} \text{ godina.}$$

b) J. Golubić je dao i rješenje uz uvjet, da su u svakom času žarenje i defekt mase proporcionalni momentanoj vrijednosti mase Sunca. Označimo li sa *dm* defekt mase u vremenu *dt*, možemo postaviti

$$dm = -\, km\, dt.$$

Odavle slijedi $\quad l\,m - l\,C = -\,kt, \quad m = C e^{-kt}.$

U času $t = 0$ imamo

$$m = m_0 = C, \quad \text{dakle} \quad m = m_0\, e^{-kt}.$$

Obilježimo li prije izračunani defekt mase Sunca u 1 sek sa Δm i postavimo li

$$\Delta m = -\, k\, m_0 \cdot 1$$

dobivamo

$$m = m_0\, e^{-\frac{\Delta m}{m_0} t}$$

Uz ovakvu pretpostavku ne bi mase Sunca nikada posve nestalo, a smanjila bi se na polovicu u „polovičnom" vremenu T, koje zadovoljava jednadžbu

$$\frac{m_0}{2} = m_0\, e^{-\frac{\Delta m}{m_0} T},$$

iz koje slijedi redom $\quad e^{\frac{\Delta m}{m_0} \cdot T} = 2,$

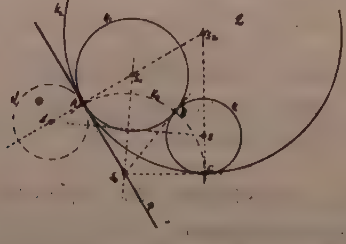
$$T = \frac{\log 2}{\log e} \cdot \frac{m_0}{\Delta m} = 0{,}69 \cdot 14{,}5 \cdot 10^{12} = 10^{13} \text{ godina.}$$

34. Odredi i nacrtaj kružnicu koja dodiruje zadanu kružnicu K i zadani pravac p u zadanoj točki A pravca p.

Zadatak je dostavio D. Cvelić, Zagreb. Riješili: M. Nikolić, Metković; Zd. Ruževič, đak, Karlovac; Gospodnetić, Zagreb; M. Brčić-Kostić Subotica; D. Skoko, đak, Duga Resa; M. Krajnović, Sisak; Z. Bulatović, Beograd; Zd. Blašković, Zagreb; S. Erdelji, student, Zagreb; N. Išpirović, Zagreb.

M. Nikolić i Zd. Blašković dali su rješenja zadatka za sve moguće slučajeve međusobnog položaja zadanog pravca prema zadanoj kružnici, dok su ostali razmatrali samo slučaj, kada pravac leži izvan kružnice, no neki od njih nisu dali oba rješenja koja su u tom slučaju moguća, već samo jedno.

Evo nekoliko čisto konstruktivnih rješenja bez upotrebe algebre:



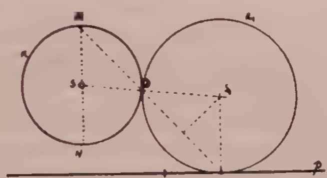
Sl. 1

A. (Gospodnetić).

Zadano p, K, A. (sl. 1.)

Središta traženih kružnica moraju ležati na pravcu q, koji je okomit na p, a prolazi točkom A. Nanesemo li na tu okomicu počam od A dužinu $A\,S' = r$, gdje je r polumjer kruga K i nacrtamo li kružnicu K', mora, iz razloga simetrije, traženo središte ležati na simetrali dužine $S\,S'$. Tako dolazimo do S_1. Ako oko sjecišta S_0 te simetrale s pravcem p opišemo kružnicu K_0 s polumjerom $S_0\,A$, sjeći će ona kružnicu K u točkama B i C koje će biti dirališta krugova K_1, odnosno K_2, jer mora biti $S_0\,A = S_0\,B = S_0\,C$.

2. (Z. Bulatović). Oko točke A treba opisati kružnicu K' s polumjerom zadane kružnice. Ako su B_1 i B_2 sjecišta kružnice K' sa okomicom q na pravac p u točki A, onda su sjecišta simetrala dužina $B_1\,S$ i $B_2\,S$ sa okomicom q ujedno i središta traženih krugova.



Sl. 2

3. (S. Erdelji i N. Išpirović, sl. 2). Točku A spojimo sa M; onda je D zajedničko diralište. Sjecište simetrale dužine $A\,D$ i okomice q je jedno traženo središte S_1. Analogno se može naći drugo rješenje pomoću spojnice točaka A i N.

Primjećujemo da se do središta S_1 moglo doći i bez pomoći simetrale; S_1 je također sjecište pravca q i spojnice točaka S i D.

Navodimo i jedno rješenje pomoću algebarske analize za slučaj da se pravac nalazi izvan kružnice, kako ga je dao M. Nikolić, primjenivši isti postupak i na ostale slučajeve. Na sličan način rješavaju zadatak: D. Skoko, M. Krajnović, Zd. Ruževič, dok se M. Brčić-Kostić služi i trigonometrijskim funkcijama, a Zd. Blašković poučcima o sličnosti.

Neka budu m i n $(n > o)$ koordinate središta zadane kružnice polumjera R, a b ordinata središta tražene kružnice u pravokutnom koordinatnom sustavu sa ishodištem u zadanoj točki A zadanog pravca p, koji ćemo pravac uzeti kao os apscisa. Onda mora biti $m^2 + (n - b)^2 = (b + R)$, a odavde slijedi

$$b = \frac{m^2 + n^2 - R^2}{2\,(n + R)}$$

Drugo rješenje bismo dobili iz $m^2 + (b - n)^2 = (b - R)^2$.

42. (Zadao D. Pejnović, Zagreb; riješili V. Jirasek, Zagreb i J. Golubić, Hvar).

Označimo li sa V volumen Zemlje, sa d debljinu a sa l dužinu užeta i postavimo li $\pi = 3_1$ imat ćemo

$$\frac{V}{100} = \frac{3}{4}\,d^2\,l.$$

Uvrštenjem podataka izlaze slijedeće zaokružene vrijednosti debljine užeta

a) koje seže do Sunca $d = 9{,}5$ km;

b) koje seže do stajačice $P.\,C.$ $d = 18$ m;

c) koje seže do spiralne maglice $d = 1$ mm.

43. (Zadao D. Pejnović, Zagreb; riješili V. Jirasek, Zagreb i J. Golubić, Hvar).

Uvrštenjem zadanih podataka za polumjer svijeta R i srednju gustoću svijeta ϱ, uzevši $\pi = 3$ izlaze redom krupno zaokružene vrijednosti:

a) volum svijeta $V = 4 R^3 \backsim 7 \cdot 10^{81}$ cm^3;

b) masa svijeta $M = V \cdot \varrho \backsim 2 \cdot 10^{53}$ grama;

c) broj protona $\backsim 10^{77}$;

d) kozmička konstanta $\lambda = \frac{1}{R^2} \backsim 6 \cdot 10^{-55}$ cm^{-2};

e) volum u kojem bi se nalazio po jedan atom vodika $\backsim 7 \cdot 10^4$ cm^3 (70 litara).

Primjedba. Prema Eddingtonovu računu uz pomoć relativističke gravitacione konstante $8 \pi f / c^2$ (gdje je f Newtonova konstanta gravitacije, a c brzina svjetlosti) izlazi za totalnu masu konačnog svijeta (svemira) vrijednost $\backsim 10^{55}$ grama, za polumjer svijeta $\backsim 10^{10}$ godina svjetlosti, za volum svijeta $\backsim 10^{84}$ cm^3. Kako je masa našeg Sunca $\backsim 10^{33}$ grama, predočivala bi totalna masa svijeta 10^{22} sunčevih masa. Taj bi broj odgovarao nekako ukupnom broju zvijezda u svemiru, pa je zanimljivo, da je on manji od Avogadrova broja (broja atoma u molu plina $N = 6 \cdot 10^{23}$). Uz pretpostavku, da jedna spiralna maglica sadrži 10^{11} zvijezda, bilo bi u cijelom svemiru 10^{11} spiralnih maglica. Poznata je Eddingtonova fraza: sto milijarda zvijezda čine spiralnu maglicu (galaxy), a sto milijarda maglica čine svemir. — Kod sviju ovih računa i procjenjivanja napose je nesigurno određena srednja gustoća svijeta ϱ, a prema tome i polumjer R. — Veliki brojevi s kojima radi astronomija (napose broj protona u svijetu 10^{77} ili 10^{79}) podsjetit će matematičara na misao, kako je astronomska „neizmjernost" malena prema matematičkoj neizmjernosti. Izračunani volum od nekoliko desetaka litara, u kojem se nalazi po jedan vodikov atom, daje sliku o prazninama u svemiru. Davno prije novih teorija (Einstein, de Sitter, Lemaitre, Eddington) kazao je Poincaré: u svemiru postoje u glavnom šupljine ili rupe.

46.* Zadao Đ. Kurepa; riješili: K. Prpić, Požega; M. Slade Šilović, Trogir; Kuljaš, Trogir; P. Smorodski, Danilovgrad; V. Cvitaš, uč. 7. r., Zagreb; D. Skoko, uč. 6. r., Duga Resa; Nev. Došek, uč. 8. r., Zagreb; Zd. Blašković, Zagreb; Sv. Kurepa, uč. 6. r., Zagreb; S. Erdelji, Senta i M. Loušin, Zagreb.

Ako sa x označimo vrijeme u satima, koje je proteklo od časa kad je biciklista ugledao neprijatelja, pa do časa kada je dao izvještaj, onda udaljenost u kilometrima obih četa iznosi $d = 30 x + 2{,}5 - 5 x$. Ovdje $30 x$ znači put što ga je prevalio biciklista, a $5 x$ put neprijateljske vojske u tom vremenu x. Vrijeme x možemo dobiti, ako izjednačimo put bicikliste $22 (3 - x)$ do onog časa kada je ugledao neprijatelja sa zbrojem $30 x + 3 \cdot 4{,}5$. Jednadžba dakle glasi $22 (3 - x) = 30 x + 13{,}5$, a odavde dobijamo $x = \frac{105}{104}$ sati; tražena udaljenost neprijateljskih četa iznosi $d = 27 \frac{77}{104}$ km. Tako je zadatak riješila uč. Nev. Došek. Na principijelno isti način riješili su: K. Prpić, V. Cvitaš; Kuljaš i Zd. Blašković.

Sv. Kurepa i D. Skoko rješavali su zadatak uvođenjem dviju nepoznanica: x znači vrijeme u satima od časa polaska bicikliste do časa kada je susreo neprijatelja; y je preostalo vrijeme do časa kad je biciklist dao svoj izvještaj. Mora biti $x + y = 3{,}22 x - 30 y = 13{,}5$. Odavde izlazi $x = \frac{103{,}5}{52}$; $y = \frac{52{,}5}{2}$. Traženi razmak iznosi $30 y + 2{,}5 - 5 y$ t. j. okruglo 27,74 km. Sličan je i postupak M. Slade Šilovića.

47.* Zadao Đ. Kurepa; zadatak su riješili: D. Skoko, uč. 6. r., Duga Resa; Zd. Blašković, Zagreb; K. Prpić, Požega; Nev. Došek, uč. 8. r., Zagreb.

D. Skoko i Nev. Došek riješili su zadatak vrlo jednostavno primjenom Ptolomejeva poučka za tetivni četverokut, a koji glasi: U tetivnom četverokutu je produkt dijagonala jednak zbroju produkata suprotnih stranica. Na osnovi toga izlazi odmah relacija $s_n^2 = s_{2n}^2 + s_{2n} \cdot d$. D. Skoko riješio je zadatak i na jedan drugi, ali mnogo duži način.

Zd. Blašković služi se relacijom $s_n^2 = s_{2n}^2 + d\,(d - 2m)$ gdje je m manji odrezak dijagonale, koji se dobije, ako se povuče visina iz jednog vrha $2n$-erokuta na dijagonalu. Budući da je $d - 2m = s_{2n}$ izlazi konačno

$$s_n^2 = s_{2n}^2 + d \cdot s_{2n}.$$

K. Prpić izrazila je s_n, s_2n i d pomoću polumjera opisane kružnice i pripadnih središnjih kuteva. Izlazi

$$s_n = 2\,r\,sin\,\frac{180^0}{n}\,; \quad s_{2n} = 2\,r\,sin\,\frac{90^0}{n}\,; \quad d = 2\,r\,sin\,\frac{270^0}{n}\,.$$

Uvrstimo li te vrijednosti u relaciju, koju treba dokazati izlazi napokon primjenom goniometrijskih formula

$$sin^2\,\frac{180^0}{n} = 4\,sin^2\,\frac{90^0}{n}\,cos^2\,\frac{90^0}{n}\,,$$

a time je dokazano da je i relacija $s_n^2 = s_{2n}^2 + d \cdot s_{2n}$ ispravna.

48.* Zadao Br. Grünbaum, uč. 7. r., Osijek; zadatak su riješili: P Smorodski, Danilovgrad; Zd. Blašković, Zagreb i S. Erdelji, Senta.

Stavimo[1]) $\sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + \ldots}}} = y.$

Odavde izlazi kubiranjem

$$x + \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + \ldots}} = y \quad \text{t. j.} \quad x + y = y^3.$$

Analogno iz $\sqrt{\frac{x}{3} + \sqrt{\frac{x}{3} + \sqrt{\frac{x}{3} + \ldots}}} = y$

izlazi kubiranjem $\frac{x}{3} + y = y^2.$

Eliminiramo li x, dobijemo jednadžbu

$$y\,(y^2 - 3y + 2) = 0 \quad \text{t. j.} \quad y_1 = 0,\ y_2 = 1,\ y_3 = 2,$$

a odavde slijedi $x_{1,2} = 0,\ x_3 = 6.$

STALJINOVE NAGRADE ZA MATEMATIKU I FIZIKU

God. 1939., povodom 60-godišnjice života J. V. Staljina, osnovane su Staljinove nagrade za najbolje radnike u nauci, tehnici, literaturi i umjetnosti u SSSR. Nagrade se kreću u granicama od 50.000 do 200.000 rubalja. Dijeli ih Savjet narodnih komesara SSSR na predlog posebnog komiteta.

Odlukom od 26. I. 1946. dobili su prve nagrade poslije rata slijedeći učenjaci:

A) matematičari:

Mihajlo A. Lavrentijev, potpredsjednik Akademije nauke Ukrajinske SSR, za obrađivanje varijaciono-geometrijske metode rješavanja nelinearnih problema u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi; ova metoda ima veliko značenje u hidromehanici i aeromehanici, a objelodanjena je u radovima: »O nekim svojstvima jednolisnih funkcija s primjenom u teoriji strujanja«, »Prilog teoriji kvazikonformnih preslikavanja«, »O nekim približnim formulama u Dirichletovom problemu«, »Prilog teoriji dugih valova«. Ti su radovi izlazili od 1938.—1943. godine.

---

1) Primjedba. O teoretskoj podlozi zadatka 48* i sl. graničnih razmatranja pisat ćemo drugom prilikom. Možda nam koji od čitalaca i sam pošalje nešto o tome!

Ivan G. Petrovski, dopisni član Akademije nauka SSSR, profesor Moskovskog državnog univerziteta M. V. Lomonosova — za osnovna istraživanja u oblasti teorije parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Konačni rezultati objelodanjeni su u radovima: »O zavisnosti rješenja Cauchyjevog problema o početnim uslovima«, »O difuziji valova i lakuna u sistemu hiperboličnih jednadžbi«. Ti su radovi objelodanjeni u vremenu od 1943.—1944. godine.

Lazar A. Ljusternik, profesor Moskovskog državnog univerziteta M. V. Lomonosova, — za izradu novih topoloških istraživanja u matematičkoj analizi. Ta je istraživanja objelodanio 1943. god. u radovima: »Topološka struktura jednog funkcionalnog prostora«, »Novi dokaz o trima geodetskim linijama«, »O svojstvima familija sfernih lukova sa slobodnim krajevima«, »O broju rješenja varijacionog problema«.

B) fizičari:

S. I. Vavilov, predsjednik Akademije nauka SSSR i njegovi saradnici I. E. Tamm, I. M. Frank, P. A. Čerenkov, članovi instituta Lebedeva u Moskvi; zatim V. A. Fok, V. A. Ambarcumian, E. F. Gros, L. D. Landau (Lenjingrad). Poznati stručnjak i organizator rada u eksperimentalnoj fizici Vavilov obradio je u duhu današnjeg vremena odnošaj filozofije i moderne fizike.

Prema posljednjim vijestima za god. 1946. nagrađeni su fizičari N. N. Bogoljubov i J. Frenkl. *D. P.*

NOBELOVA NAGRADA IZ FIZIKE ZA GOD. 1946.

Nobelova nagrada za fiziku podijeljena je P. W. Bridgmanu, profesoru Harvard-sveučilišta (Cambridge, država Massachussets, USA). Kroz nekoliko decenija istraživao je Bridgman svojstva čvrstih tjelesa, tekućina i plinova pod visokim tlakovima. Razvio je savršenu tehniku za dobivanje i mjerenje tlakova sve do nekih 150.000 atm. U velikom ovom području rada dolaze opsežna kvantitativna istraživanja o kompresibilnosti i viskoznosti tekućina, o utjecaju tlaka na električki otpor, dielektričku konstantu, čvrstoću električkog probijanja, termoelektričku snagu, na lom i zakret ravnine polarizacije svjetlosti, na talište i toplinsku vodljivost tjelesa i t. d. Važno je Bridgmanovo otkriće posljednjeg vremena, da stlačeni materijal ima visoku granicu prelamanja i raskidanja, jer je tim bilo omogućeno dobivanje najviših tlakova. Veliki dio Bridgmanova rada u ovom dijelu nauke sabran je u njegovom djelu: The Physics of high pressure, London, Bell a. Sons 1931 (str. 398).

Uvažen je Bridgmanov rad na filozofskim problemima, koji su u vezi s prirodnim naukama i matematikom. U knjizi The Nature of Physical Theory (Princeton University press, London—Oxford 1935, str. 138) obrađuje on kritički osnove fizike i moderne fizikalne teorije (Einsteinovu teoriju, valnu mehaniku, kozmološke teorije, vjerojatnost i dr.). Prema ovim teorijama ističe pisac svoje praktičko i nedogmatičko stajalište i brani svoje mišljenje duhovitom diskusijom. On tvrdi, da u novim teorijama dolaze pojmovi, koji nisu jasno i sigurno definirani i upozorava na smione i neosnovane spekulacije u kozmologiji.

Prema valnoj mehanici zauzima B. kritičko stajalište i kaže, da ona otvara vrata mnoštvu mogućih teorija; postoji uvijek više alternativnih teorija, i fizičar se može odlučiti za jednu od njih sa stajališta jednostavnosti, ili zgodnijeg matematičkog aparata ili sa čisto estetskog gledišta. Pisac citira ovdje poznate riječi W. H. Bragga, prema kojima je fizičar prisiljen, da se kroz tri dana u tjednu (ponedjeljkom, srijedom i petkom) služi klasičnom mehanikom, a u ostalim danima valnom mehanikom. Percy William Bridgman spada u stariju generaciju fizičara, rođen je god. 1882.

Na području visokih tlakova radi profesor sveučilišta u Moskvi, Nesmejanov. Aparatura izgrađena u njegovom zavodu ne zaostaje za aparaturom spomenutog američkog profesora. *D. P.*

SADRŽAJ

Članci

PRIMLJENE KNJIGE

Redakcija **Glasnika** primila je na poklon od Engleskog konzulata u Zagrebu ove knjige:

1. Albert Einstein: The Meaning of relativity (preveo E. P. Adams) — Methuen Co. Ltd., London.

2. H. F. Baker: A locus with 25920 linear selftransformations-Cambridge 1946.

3. H. J. Josephs: Heaviside's electric circuit theory (kao kod 1.), 1946. (Zbirka Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics).

4. David S. Evans: Frontiers of Astronomy, Sigma Books, 1946.

5. M. Davidson: The stars and the Mind, Watts & Co. London 1947.

Redakcija se lijepo zahvaljuje!